Теоретический минимум по курсу “Основы кибернетики”

Создан по лекциям Ложкина С.А. в 2012 году

Авторы:
Каганов В. Ю.
Королёв А. К.
и другие

1

§1

Множество всех целых чисел j для которых $a \le j \le b$, где a, b – целые, называется **отрезком** и обозначается через $[a, b]$.

Отрезки вида $[a_1, a_2), [a_2, a_3), \ldots$, где $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_n$ называются **последовательными**.

Число столбцов (строк) матрицы М называется ее **длиной** (**высотой**) соответственно.

Набор $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ – **покрытие** множества $a = a_1 \cup a_2 \cup \ldots \cup a_n$. a_i – **компоненты покрытия**, n – **ранг** (**длина**).

Разбиение – покрытие из непересекающихся множеств.

Покрытие, в котором ни одна из компонент не содержится в другой компоненте (в объединении остальных компонент) считается **неприводимым** (**тупиковым**) соответственно.

Функцию f, определенную на множестве A^n и принимающую значения из множества D (множества A) будем называть n**-арной** (n**-местной**) функцией из множества A во множество D (соответственно над множеством A) от переменных x.

Отношение, обладающее свойствами рефлексивности, транзитивности и антисимметричности, будем, как обычно, называть отношением **частичного порядка**.

Если t – отношение частичного порядка на множестве A, то пару (A, t) будем называть **частично упорядоченным множеством**.

Если любые два элемента A сравнимы, то A – **линейно упорядоченное множество**.

Под **дискретной функцией** понимают, обычно, отображение одного конечного множества в другое. Так, функция над отрезком $[0, k)$, где $k \ge 2$ называется **функцией** k**-значной логики**, (при $k = 2$ – алгебры **логики**) а множество всех таких функций обозначается через P_k.

Переменная x_i называется **несущественной переменной** функции f если $f(a) = f(b)$ для любых отличающихся только по x_i наборов α и β из A^n. В противном случае переменная x_i называется **существенной переменной** функции f.

Функция f существенно (несущественно) зависит от переменной x_i, если x_i – существенная (соответственно несущественная) переменная функции f.

f – **существенная функция**, если она существенно зависит от всех своих переменных.

Любая переменная x_j – **формула глубины 0** над множеством базисных функций Б, индуктивно глубина растет, все полученные в результате индуктивного построения записи – **формулы** над Б.

Все формулы, полученные на этапе индукции – **подформулы**, на последнем – **главные подформулы**.

Сложность (**ранг**) формулы – число вхождений в нее функциональных символов (символов переменных).

Формулы F' и F'', реализующие равные функции, называются **эквивалентными**. $F' = F''$ – **тождество**.

Множество всех функций, реализуемых над Б – **замыкание множества** Б.

Множество **полное**, если его замыкание совпадает с P_a.

Базис – конечное полное в P_a множество.

§2

Множество B^n, где $B = 0, 1$ и $n \in N$, то есть множество наборов длины n из 0 и 1, обычно называют **единичным кубом** или **гиперкубом размерности** n.

Наборы, находящиеся на расстоянии n – **противоположные**, отличающиеся в одном разряде – **соседние** (по i-й переменной).

Множество наборов куба B^n, находящихся на расстоянии t (не больше, чем t) от набора α, называется **сферой** (соответственно **шаром**) радиуса t с центром α.

На множестве B_n обычным образом введем отношение частичного порядка $\leq$ такое, что $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \leq \beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ тогда и только тогда, когда $\alpha_i \leq \beta_i$ при всех i. Наборы связанные этим отношением называются **сравнимыми**.

Для набора $y = (y_1, \dots, y_n)$ длины n над множеством $[0, 2]$ через Γ_y обозначим множество всех тех наборов $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ куба B^n, для которых $\alpha_i = y_i$ при всех i, что $y_i \neq 2$. Γ_y – **грань** куба B^n, количество "2" в наборе $= (n - r)$ – **размерность грани**, r – **ранг**.

ФАЛ f однозначно определяется своим **характеристическим множеством**, которое состоит из всех наборов α таких, что $f(\alpha) = 1$, и обозначается через N_f.

Функции x_i и $\bar{x}_i$ будем называть буквами БП x_i. Конъюнкция (дизъюнкция) r, $1 \leq r \leq n$, букв различных БП из множества $X(n)$ называется **элементарной конъюнкцией** (соответственно **элементарной дизъюнкцией**) ранга r от булевых переменных $X(n)$.

Дизъюнкция различных элементарных конъюнкций – **дизъюнктивная нормальная форма**.

Конъюнкция различных элементарных дизъюнкций – **конъюнктивная нормальная форма**.

Совершенна, если ее ЭК (ЭД) существенно зависят от одних и тех же БП, а их ранг – число БП.

Число ЭК (ЭД) – **длина** ДНФ (КНФ).

Лемма. Совершенная ДНФ ФАЛ $f, f \in P_2(n)$, является единственной ДНФ от БП $X(n)$, которая реализует эту ФАЛ, тогда и только тогда, когда во множестве N_f нет соседних наборов.

Этапы доказательства. Воспользоваться тем, что у этой ФАЛ нет граней размерности более 0. $\square$

Следствие. Совершенные ДНФ ФАЛ $l_n, \bar{l}_n$ являются единственными ДНФ этих ФАЛ от БП X(n).

§3

ФАЛ f' **имплицирует** ФАЛ f'', или, иначе, ФАЛ f'' **поглощает** ФАЛ f', если $N_{f'} \subseteq N_{f''}$, то есть импликация $(f' \to f'')$ тождественно равна 1.

Элементарная конъюнкция, которая имплицирует ФАЛ f, называется **импликантой** этой ФАЛ.

ДНФ вида $f(x_1, \dots, x_n) = K_1 \vee \ldots \vee K_s = \mathcal{U}$ будем называть **неприводимой**, если соответсвующее ей покрытие является неприводимым, то есть ни одна из граней $N_{K_1}, \dots, N_{K_s}$ не содержится ни в одной из других граней покрытия. На "языке имплицируемости" это означает, что ни одна из ЭК$K_i, i \in [1, s]$, не является импликантой ЭК K_j, где $j \in [1, s]$ и $i \neq j$.

Импликанта К ФАЛ f называется **простой импликантой** этой ФАЛ, если она не поглощается никакой другой отличной от нее импликантой ФАЛ f.

Дизъюнкция всех простых импликант ФАЛ f называется ее **сокращенной** ДНФ.

Теорема. Пусть $\mathcal{U}'$ и $\mathcal{U}''$ – сокращенные ДНФ ФАЛ f' и f'' соответственно, а неприводимая ДНФ $\mathcal{U}$ получается из формулы $\mathcal{U}' \cdot \mathcal{U}''$ в результате раскрытия скобок и приведения подобных. Тогда $\mathcal{U}$ – сокращенная ДНФ ФАЛ $f = f' \cdot f''$.

Этапы доказательства. Докажем, что в $\mathcal{U}$ входит любая простая импликанта f. $\forall K$ – простой импликанты f: K – импликанта f' и f''. В $\mathcal{U}'$, $\mathcal{U}''$ есть K', K'', которые имплицируются K. В $\mathcal{U}$ войдет имплицируемая $K' \cdot K''$ ЭК $\bar{K}$. K имплицирует $K' \cdot K''$, следовательно, и $\bar{K}$. $\bar{K}$ – одновременно импликанта f и имплицируется $K \Rightarrow \bar{K} = K$. $\square$

Следствие. Если неприводимая ДНФ $\mathcal{U}$ получается из КНФ В ФАЛ f в результате раскрытия скобок и приведения подобных, то $\mathcal{U}$ – сокращенная ДНФ ФАЛ f.

Любая ДНФ $\mathcal{U}'$, которую можно получить из ДНФ $\mathcal{U}$ путем формирования в ней с помощью тождеств ассоциативности и коммутативности подформул вида $x_i K' \vee \bar{x}_i K''$, применения к этим подформулам тождества обобщенного склеивания $x_i K' \vee \bar{x}_i K'' = x_i K' \vee \bar{x}_i K'' \vee K' K''$ и последующего приведения подобных, называется **расширением** ДНФ $\mathcal{U}$.

Расширение $\mathcal{U}'$ ДНФ $\mathcal{U}$ считается **строгим**, если $\mathcal{U}'$ содержит ЭК, не являющуюся импликантой ни одной ЭК из $\mathcal{U}$.

Теорема. Неприводимая ДНФ является сокращенной ДНФ тогда и только тогда, когда она не имеет строгих расширений.

Этапы доказательства. Докажем, что, если ДНФ неприводивая и не имеет строгих расширений, то она содержит все простые импликанты f. Рассмотрим ЭК k максимального ранга из множества тех импликант f, которые не являются импликантами ни одной ЭК из $\mathcal{U}$. Поскольку ее ранг строго меньше числа всех букв, найдется x_i, не входящая в нее. Рассмотрим ЭК вида $x_i \cdot k$ ($\bar{x}_i \cdot k$). Они суть импликанты некоторых $x_i \cdot K'$ ($\bar{x}_i \cdot K''$); K', K'' состоят из букв k. По обобщенному склеиванию, она еще и импликанта $K'K'' = \tilde{K}$, которая сама импликанта некоторой ЭК из формулы. Противоречие, т.к. получилось, что k – имликанта некоторой ЭК из формулы.

Следствие. Из любой ДНФ $\mathcal{U}$ ФАЛ f можно получить сокращенную ДНФ этой ФАЛ в результате построения последовательных строгих расширений и приведения подобных до получения неприводимой ДНФ, не имеющей строгих расширений.

§4

ДНФ $\mathcal{U}$, реализующая ФАЛ f, является **тупиковой** ДНФ, если $f \neq \mathcal{U}'$ для любой ДНФ $\mathcal{U}'$, полученной из $\mathcal{U}$ в результате удаления некоторых букв или целых ЭК.

Минимальная (**кратчайшая**) ДНФ ФАЛ f – ДНФ, которая имеет минимальная ранг (соответственно длину) среди всех ДНФ, реализующих f.

Пересечение тупиковых ДНФ ФАЛ f – дизъюнкция всех различных простых импликант этой ФАЛ, которые входят в любую тупиковую ДНФ ФАЛ f.

Набор $\alpha, \alpha \in B^n$, называется **ядровой точкой** ФАЛ $f(x_1, \ldots, x_n)$, если $\alpha \in N_f$ и α входит только в одну максимальную грань ФАЛ f. При этом грань N_k, являющаяся максимальной гранью ФАЛ f и содержащая точку α, считается **ядровой гранью** ФАЛ f, а совокупность всех различных ядровых граней ФАЛ f называется **ядром** ФАЛ f.

Лемма. ДНФ $\cap T$ ФАЛ f состоит из тех простых импликант ФАЛ f, которые соответствуют ядровым граням этой ФАЛ.

Этапы доказательства. Пусть в тупиковой нет импликанты, соответствующей ядровой грани. Тогда $f = 0$ на ядровой точке (ведь получилась непокрытая ядровая точка). Значит, простая импликанта, покрывающая ядровую точку, входит во все тупиковые ДНФ. Теперь, пусть K – простая импликанта f, не входящая в ядро. Значит, есть другие импликанты, которые покрывают ее единицы, найдется такая тупиковая ДНФ, в которой K не будет (можно выделить тупиковое подпокрытие, не содержащее K), в пересечении ее не будет. $\Box$

Сумма тупиковых ДНФ ФАЛ f – дизъюнкция всех тех различных простых импликант этой ФАЛ, которые входят хотя бы в одну тупиковую ДНФ ФАЛ f.

ФАЛ является **ядровой**, если все ее максимальные грани являются ядровыми.

ДНФ, получающаяся из сокращенной ДНФ ФАЛ f удалением тех ЭК K, для которых грань N_K покрывается ядром ФАЛ f, но не входит в него, называется **ДНФ Квайна** этой ФАЛ.

Пучок ФАЛ f через точку α – $\Pi_\alpha(f)$ – множество всех проходящих через α максимальных граней ФАЛ f.

Точка $\alpha, \alpha \in N$, является **регулярной точкой** ФАЛ f, если найдется точка $\beta, \beta \in N_f$, для которой имеет место строгое включение $\Pi_\beta(f) \subset \Pi_\alpha(f)$.

Грань N_K ФАЛ f называется **регулярной гранью** этой ФАЛ, если все точки N_K регулярны.

Теорема. Простая импликанта K ФАЛ f входит в ДНФ ΣT тогда и только тогда, когда грань N_K не является регулярной гранью этой ФАЛ.

Этапы доказательства. $\forall$ регулярной точки α найдется нерегулярная β. Система граней из всех β покроет все α. Противоречие с тупиковостью. Пучок нерегулярной точки α строго меньше пучка любой точки $\beta \in N_f \backslash N_k$ (из этого следует, что нашлась такая грань N_{K_j}, которая покрыла β, из чего следует неравенство пучков), где k – грань, содержащая α. Значит, N_k удалить нельзя. $\Box$

Для каждой максимальной грани $\mathcal{N}$ ФАЛ $f(x_1, \ldots, x_n)$ положим $S_0(\mathcal{N}, f) = \{\mathcal{N}\}$, а затем индукцией по $r, r = 1, 2, \ldots$ определим множество $S_r(\mathcal{N}, f)$ как множество всех тех максимальных граней ФАЛ f, которые имеют непустое пересечение хотя бы с одной гранью из $S_{r-1}(\mathcal{N}, f)$. $S_r(\mathcal{N}, f)$ – **окрестность порядка** r грани $\mathcal{N}$ ФАЛ f.

§5

ФАЛ f **линейно зависит** от БП x_i (БП x_i является **линейной БП** ФАЛ f), если $f(\alpha) \neq f(\beta)$ для любых соседних по БП x_i наборов α и β куба B^n.

ФАЛ f называется **монотонной**, если $f(\alpha) \leq f(\beta)$ для любых наборов α и β куба B^n таких, что $\alpha \leq \beta$.

ФАЛ f **монотонно зависит от БП** x_i (БП x_i является **монотонной БП** ФАЛ f), если неравенство $f(\alpha) \leq f(\beta)$ выполняется для любых соседних по БП x_i наборов α и β куба B^n таких, что $\alpha \leq \beta$.

Утверждение. Если ФАЛ f монотонно зависит от БП x_i, то ни одна из ее простых импликант не может содержать букву $\bar{x}_i$.

Этапы доказательства. Пусть есть импликанта $\bar{x}_i K$. Тогда на наборе, который обращает K в 1, и $x_i = 0$, импликанта равна 1, а на наборе, где $x_i = 1$ (большем, чем предыдущий) импликанта равна 0, что противоречит монотонности.

ФАЛ f **конъюнктивно** (**дизъюнктивно**) зависит от БП x_i, когда $f = x_i \cdot g$ (соответственно $f = x_i \vee g$), где ФАЛ g получается из f подстановкой константы 1 (соответственно 0) вместо БП x_i.

ФАЛ f **инмонотонно** (**инконъюнктивно**, **индизъюнктивно**) зависит от БП x_i, если ФАЛ $f(x_1, \ldots, x_{i-1}, \bar{x}_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ зависит от x_i монотонно (соответственно, конъюнктивно, дизъюнктивно).

Сопоставим каждому набору $\beta \in B^n$, монотонную ЭК K_β^+ от БП $X(n)$, состоящую из тех и только тех букв $x_j, j \in [1, n]$, для которых $\beta\langle j\rangle = 1$.

Набор $\alpha, \alpha \in B^n$, называется **нижней единицей** монотонной ФАЛ $f, f \in P_2(n)$, если $\alpha \in N_f$ и $f(\beta) = 0$ для любого отличного от α набора β такого, что $\beta \leq \alpha$. Множество всех нижних единиц монотонной ФАЛ f – N_f^+.

Лемма. Сокращенная ДНФ $\mathcal{U}$ монотонной ФАЛ $f, f \in P_2(n)$, является единственной тупиковой ДНФ этой ФАЛ и имеет вид $\mathcal{U}(x_1, \ldots, x_n) = \bigvee\limits_{\beta \in N_f^+} K_\beta^+(x_1, \ldots, x_n)$. При этом все наборы из N_f^+ являются ядровыми точками ФАЛ f.

Этапы доказательства. $K_\beta^+(\alpha) = 1$ тогда и только тогда, когда $\alpha \geq \beta$. Следовательно, β – единственная нижняя единица K_β^+, $K_{\beta'}^+$ имплицирует $K_{\beta''}^+$ тогда и только тогда, когда $\beta' \geq \beta''$. Получим, что K_β^+ – простая импликанта f в том и только том случае, когда $\beta \in N_f^+$. И β – ядровая точка f. □

Следствие. Монотонная ФАЛ является ядровой ФАЛ.

$\mathcal{N} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_s\}$ – конечное множество, а $\mathfrak{R} = (\mathcal{N}_1, \ldots, \mathcal{N}_p)$ – система его подмножеств, образующих покрытие множества $\mathcal{N}$. Сопоставим паре $(\mathcal{N}, \mathfrak{R})$ матрицу $M, M \in B^{p,s}$, для которой $M\langle i, j\rangle = 1$ тогда и только тогда, когда $\alpha_j \in N_i$. i-я строка матрицы M **покрывает** ее j-й столбец, если $M\langle i, j\rangle = 1$. Система строк с номерами из $I, I \subseteq [1, p]$, образует **покрытие матрицы** M, если каждый ее столбец покрывается хотя бы одной строкой с номером из I, то есть система подмножеств $\{N_i\}_{i \in I}$ задает покрытие множества N.

Покрытие матрицы M, в котором ни одна строка не покрывается другой строкой, считается **неприводимым**, а покрытие, не имеющее собственных подпокрытий, называется **тупиковым**.

$M, M \in B^{p,s}$ – матрица без нулевых столбцов. Сопоставим i-й строке, $i \in [1, p]$, матрицы M БП y_i, а каждому набору $\beta, \beta \in B^p$, значений этих переменных $y = (y_1, \ldots, y_p)$, – множество строк матрицы M с номерами из множества $I = I(\beta) \subseteq [1, p]$, где $i \in I(\beta)$ тогда и только тогда, когда $\beta\langle i\rangle = 1$. ФАЛ $F(y)$, для которой $F(\beta) = 1$ тогда и только тогда, когда система строк матрицы M с номерами из $I(\beta)$ образует ее покрытие, – **функция покрытия** матрицы M.

Лемма. Функция покрытия $F(y_1, \ldots, y_p)$ матрицы $M, M \in B^{p,s}$, без нулевых столбцов задается КНФ вида: $F(y_1,\ldots,y_p) = \bigwedge_{j=1}^{s} (\bigvee_{\substack{1\le i\le p\\ M<i,j>=1}} y_i)$.

Этапы доказательства. Пусть J_j – то, что в скобках. $J_j(\beta) = 1$ для произвольного $\beta \Leftrightarrow$ мн-во строк с номерами из $I(\beta)$ покрывают j столбец $\Rightarrow$ вся КНФ обращается в 1 тогда и только тогда, когда $I(\beta)$ образуют покрытие. $\square$

Следствие. В результате раскрытия скобок и приведения подобных из упомянутой КНФ можно получить сокращенную ДНФ ФАЛ $F(y)$, простые импликанты которой взаимно однозначно соответствуют тупиковым покрытиям матрицы M.

§6

Теорема. Пусть для действительного $\gamma, 0 < \gamma \le 1$, в каждом столбце матрицы $M, M \in B^{p,s}$, имеется не меньше, чем $\gamma{\cdot}p$, единиц. Тогда покрытие матрицы M, получаемое с помощью градиентного алгоритма, имеет длину не больше, чем $\lceil \frac{1}{\gamma} \ln^+(\gamma s)\rceil + \frac{1}{\gamma}$. $\ln^+ x = \ln x$, если $x \ge 1$, $\ln^+ x = 0, 0 < x < 1$.

Этапы доказательства. Пусть покрытие длины q. Рассмотрим шаг t алгоритма. δ_t – доля оставшихся столбцов. Поскольку за один шаг мы удаляем не менее одного столбца, справедливо неравенство: $q \le t + \delta_t \cdot s$. В матрице на шаге t всего $\gamma p s \delta_t$ единиц, в среднем, $\gamma s \delta_t$ в строке. Таким образом, в максимальной строке не меньше, чем $\gamma s \delta_t$ единиц. Отсюда получаем $s\delta_{t+1} = s_{t+1} \le s_t - \gamma s \delta_t = s\delta_t(1-\gamma)$. Следовательно, $\delta_t \le (1-\gamma)^t \le e^{-\gamma t}$. Взяв параметр t нужным образом, и подставив его в первое неравенство, получим необходимую оценку.

Лемма. При любых натуральных n и $m, m \le n$, в кубе B^n всегда найдется подмножество мощности не более, чем $n \cdot 2^m$, протыкающее все грани ранга m.

Этапы доказательства. Рассмотреть множество граней ранга m и систему его подмножеств, проходящих через точку α. Рассмотреть матрицу, связанную с этой парой и воспользоваться предыдущей теоремой. $\square$

§7

Задача минимизации ДНФ – задача построение оптимальной в том или ином смысле ДНФ для заданной ФАЛ.

Неотрицательный функционал сложности ψ обладает свойством **монотонности**, если $\forall$ ДНФ $\mathcal{U}$ определена сложность $\psi(\mathcal{U}), \psi(\mathcal{U}) \ge 0, \psi(\mathcal{U}') > \psi(\mathcal{U}'')$, если $\mathcal{U}''$ получается из $\mathcal{U}'$ удалением букв или ЭК.

Задача минимизации ДНФ относительно функционала ψ – построение для ФАЛ f такой ДНФ $\mathcal{U}$, что $\psi(\mathcal{U}) = \min \psi(\mathcal{U}')$, где минимум берется по всем ДНФ $\mathcal{U}'$, реализующим ФАЛ f. Тогда $\mathcal{U}$ – **минимальная относительно функционала** ψ, значение $\psi(\mathcal{U})$ – **сложность f относительно** ψ или ψ**-сложность**.

Функция Шеннона для класса ДНФ относительно ψ – это $\psi(n) = \max\limits_{f\in P_2(n)} \psi(f)$, характеризует максимальное значение ψ-сложности ФАЛ из $P_2(n)$.

Лемма. Для любого $n, n \in \mathbb{N}$ имеют место соотношения $\lambda(n) = 2^{n-1}$ (это **длина**), $R(n) = n \cdot 2^{n-1}$ (это **ранг**).

Этапы доказательства. Нижние оценки – из совершенной ДНФ линейной. Верхние – из разложения Шеннона по всем переменным, кроме первой (тогда получится не более 2^{n-1} слагаемых рангом $\le n$ из-за того, что раскладываем по $n-1$ переменной и еще опционально умножаем на 1 букву) $\square$

Пусть типичные значения $\psi(n)$ принадлежат $[\psi'(n), \psi''(n)]$. Если $\psi'(n)$ и $\psi''(n)$ асимптотически равны $\psi(n)$, то это называется **эффектом Шеннона**. У $\lambda(n)$ и $R(n)$ его не наблюдается.

Утверждение. Почти для всех ФАЛ из $P_2(n)$ верно $|N_f| = 2^{n-1} \cdot (1 \pm O(n \cdot 2^{-\frac{n}{2}}))$.

Этапы доказательства. Оценить матожидание и дисперсию случайной величины, равной 0 или 1 с равными вероятностями ($\mathbb{E} = \frac{1}{2}; \mathbb{D} = \frac{1}{4}$), потом перейти к случаю суммы из n таких случайных величин ($\mathbb{E} = 2^{n-1}; \mathbb{D} = 2^{n-2}$). Затем воспользоваться неравенством Чебышева. □

Лемма. Для почти всех ФАЛ f из $P_2(n)$ выполнены неравенства: $\lambda(f) \leq \frac{3}{4} \cdot 2^{n-1} \cdot (1 \pm O(n \cdot 2^{-\frac{n}{2}}))$ и $R(f) \leq \frac{3}{4} \cdot n \cdot 2^{n-1} \cdot (1 \pm O(n \cdot 2^{-\frac{n}{2}}))$.

Этапы доказательства. Рассмотреть случайную величину как дизъюнкцию двух, оценить ее дисперсию и матожидание ($\mathbb{E} = \frac{3}{4}; \mathbb{D} = \frac{3}{16}$), затем вычислить их для суммы из n таких случайных величин ($\mathbb{E} = \frac{3}{4}2^{n-1}; \mathbb{D} = \frac{3}{16}2^{n-1}$). Далее, аналогично предыдущему утверждению. □

§8

Будем обозначать значение функции Шеннона для параметров, равных числу тупиковых ДНФ, числу минимальных ДНФ и длине сокращенной ДНФ ФАЛ из $P_2(n)$ как $\tau(n), \mu(n)$ и $\lambda_{\text{сокр}}$ соответственно.

Лемма. Число тупиковых (минимальных) ДНФ у ФАЛ f из $P_2(n)$, $n \geq 4$, вида $f(x_1, \ldots, x_n) = g(x_1, x_2, x_3) \cdot (x_4 \oplus \ldots \oplus x_n)$, где $\bar{N} = \{(000), (111)\}$, равно $5^{2^{n-4}}$ (соответственно, $2^{2^{n-4}}$).

Этапы доказательства. Вывести вид простой импликанты из свойств f и g (Всего в сокращенной ДНФ f 6 разных ЭК, а $\oplus$ всех степеней ЭК g равна 1, ведь она линейна). Получить геометрическое представление (циклы длины 6, всего их 2^{n-4}). Любая тупиковая (минимальная) включает одно из 5 (2) реберных покрытий для каждого цикла, поэтому получаются оценки из условия. □

Следствие. $\tau(n) \geq 5^{2^{n-4}}$, $\mu_n(n) \geq 2^{2^{n-4}}$.

Для $I \subseteq [0, n]$ через $s_n^I(x_1, \ldots, x_n)$ обозначим ФАЛ из $P_2(n)$, которая является характеристической ФАЛ объединения всех слоев куба B_n с номерами из I. При этом числа из I считаются **рабочими числами** ФАЛ s_n^I. Заметим, что ФАЛ s_n^I является **симметрической**, то есть не изменяет свое значение при любой перестановке аргументов, и наоборот, любая симметрическая функция алгебры логики совпадает с одной из ФАЛ вида s_n^I.

Симметрическая ФАЛ называется **поясковой**, если ее рабочие числа образуют отрезок.

Лемма. $\lambda_{\text{сокр}}(n) \geq e_1 \cdot \frac{3^n}{n}$, где e_1 – некоторая константа.

Этапы доказательства. Поясковая ФАЛ от n перменных с рабочими числами $[r, p]$имеет ДНФ $\bigvee\limits_{\substack{1 \leq i_1 < \cdots < i_{n+p-r} \leq n \\ \sigma_1 + \cdots + \sigma_{n+p-r} = r}} x_{i_1}^{\sigma_1} \cdots x_{i_{n+r-p}}^{n+r-p}$. То есть сначала мы выбираем среди n переменных r переменных без отрицания, а потом среди $n - r$ переменных $n - p$ с отрицанием. Так что ее длина равна $C_r^n \cdot C_{n-p}^{n-r}$. Воспользовавшись формулой Стирлинга, получим утверждение леммы □

Функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется **цепной** (**циклической**) функцией длины t, если ее сокращенная ДНФ с "геометрической" точки зрения представляет собой цепь (соответственно цикл) из t последовательно соединенных ребер $N_1, N_2, \ldots, N_t$ куба B_n.

Теорема (Журавлева). При любом $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$, в $P_2(n)$ существуют ФАЛ f' и f'', имеющие общую простую импликанту K, которая входит в ДНФ ΣM одной, но не входит в ДНФ ΣM другой из этих ФАЛ и для которой $S_{n-3}(N_K, f') = S_{n-3}(N_K, f'')$.

Этапы доказательства. Построим цепную функцию f четной длины $t = 2k \geq 2n - 2 \geq 4$, далее получим цепные ФАЛ f', f'' нечетной длины $2k - 1$ удалением первой и последней вершины из ФАЛ f. Тогда каждое ребро $\mathcal{N}_i$, где $i = 2, \ldots, t - 1$, входит в ДНФ ΣM одной из них, но не входит в ДНФ ΣM другой. В качестве N_K возьмем N_k.

В качестве f надо брать ФАЛ длины $(2n - 2)$, у которой N_f из таких наборов, где первые i переменных равны 1, остальные нули, $i \in [1, n]$ и отрицаний к этим наборам (всего $2n - 1$ наборов). Ее ребра, $(2n - 2)$ штуки, будут иметь вид $\{a_j, a_{j+1}\}$. □

2

§1

Пару (V, E), где E – сочетание (с возможными повторениями) над множеством упорядоченных и неупорядоченных пар из V, будем, как обычно, называть **графом** с множеством вершин $V = V(G)$ и множеством ребер $E = E(G)$.

Упорядоченные (неупорядоченные) пары вершин называются **ориентированными ребрами** или, иначе, **дугами** (соответственно **неориентированными ребрами**), одинаковые пары – **параллельными ребрами** (дугами), дуги, отличающиеся порядком вершин, – **противоположными дугами**, а пары из совпадающих вершин – **петлями.** Граф из ориентированных (неориентированных) ребер считается **ориентированным** (соответственно **неориентированным**).

Будем говорить, что ориентированное (неориентированное) ребро **инцидентно** составляющим его вершинам, а дуга (u, v) исходит или, иначе, выходит из вершины u и заходит или, иначе, входит в вершину v. Число ребер, **инцидентных** вершине v (входящих в v, выходящих из v) в графе G, называется **степенью** (соответственно полустепенью захода, полустепенью исхода) вершины v в графе G и обозначается через $d_G(v)$.

Вершина v называется **изолированной вершиной (стоком, истоком)** графа G, если $d_G(v) = 0$ (соответственно $d^-_G(v) = 0$, $d^+_G(v) = 0$).

Граф $G' = (V', E')$ называется подграфом графа $G = (V, E)$, если $V' \subseteq V$ и $E' \subseteq E$. При этом G' считается **подграфом** графа G, натянутым на множество вершин V', если E' включает в себя все входящие в E пары вершин из V'.

Подграф называется **остовным подграфом**, если он содержит все вершины исходного графа.

Последовательность C, состоящая из ребер $e_1, e_2, \ldots, e_n$, где $e_i = (v_i, v_{i+1}) \in E(G)$ при всех i, $i \in [1, n]$, называется $(v_1 - v_{n+1})$**-путем графа** G. При этом вершина $v_1(v_{n+1})$ считается начальной (соответственно конечной) вершиной этого пути, вершины $v_2, \ldots, v_n$ – его **внутренними вершинами**, а число n – его **длиной**. Если все ребра пути различны (как элементы соответствующего сочетания), то он называется **цепью**, а если, кроме того, различны все его вершины, то – **простой цепью**. Если начальная и конечная вершины пути (цепи) C совпадают, то C считается **замкнутым путем** (соответственно **циклом**). Цикл, в котором все вершины, кроме начальной и конечной, различны, называется **простым циклом**.

Вершина u **достижима** из вершины v в графе G, где $u, v \in V(G)$, если $u = v$ или в G существует $(v - u)$-цепь.

Связной компонентой графа называется граф, натянутый на класс эквивалентности по отношению достижимости.

$|E(G)| - |V(G)| + |c(G)| \geq 0$. Левая часть называется **цикломатическим числом** графа G.

Множество S, которое состоит из ребер графа $G = (V, E)$ и обладает тем свойством, что вершина $u, u \in V$, достижима из вершины $v, v \in V$, в графе G, но не достижима из нее в графе $(V, E\ S)$, называется $(u|v)$-сечением графа G.

Сечение, которое не имеет собственных подмножеств, являющихся сечением, называется **тупиковым**.

Неориентированный (ориентированный) граф, не имеющий циклов (соответственно ориентированных циклов), называется **ациклическим**.

Глубина вершины v (соответственно **исходящая глубина**) – максимальная длина $(u - v)$-(соответственно $(v - u)$-) путей графа G, где u – один из истоков (соответственно стоков) G.

Неориентированный связный ациклический граф называется **деревом** Дерево с выделенной вершиной (**корнем**) называется **корневым деревом**, а все отличные от корня вершины степени 1 этого дерева считаются его **листьями**.

Ориентированным деревом называется граф, получающийся заменой в дереве ребер на ориентированные, ведущие к корню.

Дерево (ориентированное дерево) D, являющееся остовным подграфом графа G, называется его **остовным поддеревом**, а дерево D', которое получается из D в результате «под-соединения» всех не вошедших в него ребер G к своим «начальным» вершинам, – **остовным наддеревом** графа G.

Граф, вершинам и (или) ребрам которого сопоставлены определенные символы (пометки), считается **помеченным графом**.

Графы $G' = (V', E')$ и $G'' = (V'', E'')$ называются **изоморфными**, если существуют такие взаимнооднозначные отображения $\varphi : V' \to V''$ и $\psi : E' \to E''$, при которых вершины и неориентированные ребра (дуги) G' переходят в вершины и неориентированные ребра (соответственно дуги) G'' с сохранением отношения инцидентности (соответственно исхода, захода) вершин и ребер, а также всех пометок.

Известно, что $|D(q)| \leq 4^q$, где $D(q)$ – множество упорядоченных ориентированных корневых деревьев с не более, чем q ребрами.

Набор вида $G = (G; V'; V'')$, где G – граф, а V' и V'' – выборки из множества $V(G)$ длины p и q соответственно, причем выборка V' является выборкой без повторений, называется **(p, q)-сетью**. При этом выборка V' (выборка V'') считается **входной** (соответственно **выходной**) выборкой, а ее i-я вершина называется i-м **входным** (соответственно **выходным**) полюсом или, иначе, i-м **входом** (соответственно **выходом**).

Сеть, в которой входная и выходная выборки совпадают (не совпадают), называется **сетью с неразделенными (соответственно с разделенными)** полюсами.

Матрица достижимости выборки V' из выборки V'' – матрица M, $M \in B^{p,q}$, для которой $M_{ij} = 1$, если v''_j достижима из v'_j и 0 иначе.

Заметим также, что **транзитивность рефлексивной матрицы** M, $M \in B^{m,m}$, имеет место тогда и только тогда, когда $M^2 = M$.

Матрица достижимости выходной выборки сети из ее входной выборки называется **матрицей достижимости этой сети**.

Система из всех ЭК (ЭД), упорядоченных по их номерам, называется конъюнктивным (соответственно дизъюнктивным) **дешифратором** порядка n.

Функция вида $\mu_n(x_1, \ldots, x_n, y_0, \ldots, y_{2^n-1}) = \bigvee\limits_{\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)} x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} y_{\nu(\alpha)}$ называется мультиплексорной, переменные x называются адресными, y – информационными.

Схему, которая реализует систему ФАЛ Q_n (J_n, μ_n) будем называть **дешифратором** (соответственно **дизъюнктивным дешифратором, мультиплексором**) порядка n. Схемы, реализующие равные системы функций, называются **эквивалентными**.

Изоморфные схемы всегда эквивалентны, и поэтому для любого конечного множества схем $\mathcal{U}$ выполняется неравенство $||\mathcal{U}|| \leq |\mathcal{U}|$, где $||\mathcal{U}||$ – число попарно неэквивалентных схем в $\mathcal{U}$.

§2

Любая переменная x_j из X считается формулой **глубины** 0 или, иначе, тривиальной формулой над базисом Б, которая реализует функцию x_j. Формула глубины q – рекурсивно.

«Графически» совпадающие формулы считаются **изоморфными**, а формулы $\mathcal{F}'$ и $\mathcal{F}''$, реализующие равные функции f' и f'', называются **равными** или, иначе, **эквивалентными**. Равенство вида $t : \mathcal{F}' = \mathcal{F}''$ считается **тождеством**.

Ранг $R(\mathcal{F})$ формулы $\mathcal{F}$ равен числу листьев связанного с ней дерева D, ее **сложность** $L(\mathcal{F})$ равна числу остальных вершин D, а ее **глубина** $D(\mathcal{F})$ – глубине его корня.

Лемма. Для формулы $\mathcal{F}, \mathcal{F} \in \mathcal{U}^\Phi$, выполняются неравенства $R(\mathcal{F}) = L_{\&,\vee}(\mathcal{F}) + 1 \leq L(\mathcal{F}) + 1 \leq 2^{D(\mathcal{F})}$, где $L_{\&,\vee}(\mathcal{F})$ – число ФС & и $\vee$ в формуле $\mathcal{F}$.

Этапы доказательства. Вычислить число ребер, входящих в вершины дерева и выходящих из вершин и приравнять их. Второе соотношение – индукцией (наибольший ранг будет при полном дереве из бинарных операций, и он будет 2^D). $\square$

Следствие. $D(\mathcal{F}) \geq \lceil \log(L(\mathcal{F}) + 1) \rceil$.

Если позиционную подформулу формулы $\mathcal{F}$ заменить эквивалентной, учитывая тождество t, то это называется **эквивалентным преобразованием** $\mathcal{F}$ на основе t.

Формулы из $\mathcal{U}^\Phi$, получающиеся друг из друга эквивалентными преобразованиями на основе тождеств t^K а также тождеств t^A называются **подобными**.

Формула, в которой все ФС $\neg$ встречаются только над БП, называется **формулой с поднятыми отрицаниями**.

Альтернирование $Alt(\mathcal{F})$ формулы $\mathcal{F}$ с поднятыми отрицаниями – максимальное число изменений типов ФС & и $\vee$ в цепях дерева, соответствующего формуле $\mathcal{F}$.

Теорема. Для любой формулы $\mathcal{F}$ с поднятыми отрицаниями из $\mathcal{U}^{\Phi}$ существует подобная ей формула $\mathcal{F}'$ такая, что $D(\mathcal{F}') \leq \lceil \log(L(\mathcal{F})+1) \rceil + Alt(\mathcal{F})$.

Этапы доказательства. Проведем доказательство индукцией по рангу. Для тривиальной формулы при $R = 1$ утверждение выполнено. Пускай оно выполнено для ранга $r-1$. Пусть формула $\mathcal{F}$ имеет ранг r и альтернирование a. Представим формулу в виде дизъюнкции или конъюнкции формул меньшего ранга, у которых альтернирование не больше $a' = \max\{0, (a-1)\}$. d равно сумме глубины $\mathcal{F}$ и $a-a'$. d_i – глубина $\mathcal{F}_i$. $\sum\limits_{i=1}^{t} 2^{d_i} \leq 2^d$. Для каждой формулы $\mathcal{F}_i$ построим подобную ей $\check{\mathcal{F}}_i$ такую, что $D(\check{\mathcal{F}}_i) \leq d_i + a'$. Упорядочим формулы по возрастанию глубины и подставим их в полное двоичное d-ярусное дерево, удалив не используемые ФС. Тогда $D(\check{\mathcal{F}}) \leq d + a'$, что и требовалось доказать.

Следствие. Для любой ЭК или ЭД K существует подобная формула K' такая, что $D(K) = \lceil \log(L(K)+1) \rceil$, которая минимальна по глубине.

Следствие. Для любой ДНФ или КНФ $\mathcal{U}$ существует формула $\mathcal{U}'$, что $D(\mathcal{U}') = \lceil \log(L(\mathcal{U})+1)+1 \rceil$.

§3

Система тождеств τ называется полной, если для любых эквивалентных формул $\mathcal{F}''$ и $\mathcal{F}'$ над Б имеет место выводимость $\mathcal{F}'' \underset{\tau}{\rightrightarrows} \mathcal{F}'$.

Произвольную конъюнкцию букв, содержащую, в общем случае, повторяющиеся или противоположные буквы, будем называть **обобщенной ЭК (ОЭК)**, а дизъюнкцию таких конъюнкций, содержащую, в общем случае, повторяющиеся «слагаемые», – **обобщенной ДНФ (ОДНФ)**. Обычную ЭК (ДНФ) и формулу $x_1\bar{x}_1$ будем считать **канонической ОЭК** (соответственно **канонической ОДНФ**), а совершенную ДНФ и формулу $x_1\bar{x}_1$ – **совершенными ОДНФ**.

Лемма. Любую формулу $\mathcal{F}(x_1, \ldots, x_n)$, реализующую ФАЛ f, с помощью ЭП на основе системы тождеств $\tau_{\text{осн}}$ можно преобразовать в совершенную ОДНФ ФАЛ f от БП $X(n)$.

Этапы доказательства. Сначала привести формулу с помощью τ^M к формуле с поднятыми отрицаниями. Затем, используя $\tau^D_{\&,\vee}, \tau^K_{\&}$ раскрыть скобки. Наконец, с помощью $\tau^{\text{ПП}}$, где $\tau^{\text{ПП}} = \{\tau^A, \tau^K, \tau^{\text{ПК}}, \tau^{\text{ОП}}, \tau^{\text{П}}\}$, привести подобные в 3 шага: приведение всех ОЭК в канонические ОЭК, устранения повторных вхождений равных ЭК или подформул $x \vee \bar{x}$, приведение поглощений ЭК; с помощью тождества дистрибутивности дополнить все КНФ до необходимго ранга. Тождества ассоциативности, коммутативности и подстановки констант действуют на двух последних шагах. $\square$

Теорема. Система $\tau_{\text{осн}}$ – полная система тождеств.

Этапы доказательства. Пусть две формулы эквивалентны. Можно свести обе к ОДНФ с помощью предыдущей леммы, используя только $\tau_{\text{осн}}$. Значит, она – полная система тождеств. $\square$

§4

Схемой из функциональных элементов над базисом Б называется ориентированная ациклическая упорядоченная сеть Σ, входная выборка которой состоит из всех истоков Σ, а вершины помечены следующим образом: каждому входу (выходу) Σ сопоставлена БП из $\mathcal{X}$ (соответственно $\mathcal{Z}$), являющаяся пометкой связанной с ним вершины, причем различным входам (выходам) сопоставлены различные БП, а упорядоченность вершин во входной и выходной выборках Σ определяется упорядоченностью сопоставленных им БП; каждая отличная от истока вершина v схемы Σ помечена ФС φ_i.

Схема Σ, которая получается из дерева D, связанного с формулой $\mathcal{F}$ из $\mathcal{U}^{\Phi}$, в результате отождествления листьев с одинаковыми пометками и приписывания его корню выходной БП из $\mathcal{Z}$, называется **квазидеревом**, соответствующим формуле $\mathcal{F}$.

Вершина СФЭ называется **висячей,** если она является стоком, но не является выходом схемы. Схема называется приведенной, если в ней нет висячих вершин.

$L(\Sigma)$ – **сложность** Σ, то есть число всех ее ФЭ; $D(\Sigma)$ – **глубина** Σ, то есть максимальная глубина ее вершин. $R(\Sigma)$ – **ранг** Σ, то есть число дуг,исходящих из ее входов.

Лемма. Для приведенной СФЭ $\Sigma, \Sigma \in \mathcal{U}^C$, с одним выходом, выполняются неравенства $R(\Sigma) \leq L_{\&,\vee}(\Sigma) + 1 \leq L(\Sigma) + 1 \leq 2^{D(\Sigma)}$, где $L_{\&,\vee}(\Sigma)$ – число ФС $\&$ и $\vee$ в Σ.

Этапы доказательства. Эта лемма – просто перенос на класс СФЭ леммы из §2. □

Лемма. Для любых натуральных n, L, D выполняются неравенства $|\mathcal{U}^{\Phi}(L,n)| \leq (10n)^{L+1}$, $||\mathcal{U}^{\Phi}(L,n)|| \leq (8n)^{L+1}$, $|\mathcal{U}^{\Phi}[D,n]| \leq (8n)^{2^D}$.

Этапы доказательства. Сопоставляем каждой внутренней вершине дерева набор из B^2 (для конъюнкций и дизъюнкций) или B^1 (для отрицаний) – его i-й элемент равен 1, если дуга с номером i, выходящая из вершины, начинается с листа. Кроме того, для вершин с наборами из B^2, сопоставим символ из набора $[\vee, \&]$. Тогда получится $4_{(\text{число наборов в } B^2)} \times 2_{(\text{символ операции})} + 2_{(\text{число наборов в } B^1)} = 10$ возможных вариантов атрибута вершины. Получаем оценку $(10n)^{L+1}$. Оценка $(8n)^{L+1}$ получается из-за отождествления наборов (01) и (10) в B^2, там, где получалось 10, получается $3 \times 2 + 2 = 8$. Последнее получается из предпоследнего и первой леммы в §2. □

Лемма. Для любых натуральных n и L выполняется неравенство $||\mathcal{U}^C(L,n)|| \leq (8(L+n))^{L+1}$.

Этапы доказательства. Получается из приведенной в предыдущей лемме оценки числа деревьев и того факта, что каждый лист можно присоединить либо к n входам, либо к L внутренним вершинам. □

§5

Подстановки – ряд «простейших» преобразований, сохраняющих эквивалентность схем.

Подстановка тождества t – тождество $\hat{t} : \hat{\Sigma}' \sim \hat{\Sigma}''$, которое получается в результате применения одной и той же подстановки к обеим частям тождества $t : \Sigma' \sim \Sigma''$.

Схема Σ' называется **подсхемой схемы** Σ, если $V(\Sigma') \subseteq V(\Sigma), E(\Sigma') \subseteq E(\Sigma)$ и любая вершина $v, v \in V(\Sigma')$, которая либо относится к множеству входов (выходов) Σ, либо служит конечной (соответственно начальной) вершиной некоторого ребра из $E(\Sigma) \setminus E(\Sigma')$, является входом (соответственно выходом) Σ'.

Теорема. Если τ – конечная полная система тождеств для ЭП формул из $\mathcal{U}^{\Phi}_{\text{Б}}$, то $\{\underline{\tau}, \tau^{\text{C}}, \tau^{\text{B}}\}$ – конечная полная система тождеств для ЭП СФЭ из $\mathcal{U}^{\text{C}}_{\text{Б}}$.

Этапы доказательства. С помощью тождеств снятия и ветвления избавляемся от всех внутренних ветвлений и висячих вершин, получаем схему, которая моделирует формулу. А для преобразования в формулах используется $\underline{\tau}$. □

Следствие. Система тождеств $\{\underline{\tau}^{\text{осн}}, \tau^{\text{B}}, \tau^{\text{C}}\}$ – КПСТ для ЭП СФЭ из $\mathcal{U}^{\text{C}}$.

Пусть помимо базиса $\text{Б} = \{\varphi_i\}_{i=1}^{b}$ у нас имеется другой конечный полный базис $\text{Б}' = \{\varphi'_i\}_{i=1}^{b'}$, и пусть формула $\Phi'_i(x_1, \ldots, x_{k'_i})$ из $\mathcal{U}^{\Phi}_{\text{Б}'}$, где $k'_i \geq k_i$, реализует ФАЛ $\varphi_i, i = 1, \ldots, b$. Заметим, что в случае $k'_i > k_i$ БП $x_{k_i+1}, \ldots, x_{k'_i}$ являются фиктивными БП формулы Φ'_i. Положим $\Phi' = (\Phi'_1, \ldots, \Phi'_b), \Pi' = (\Pi'_1, \ldots, \Pi'_b)$, где Π'_i – тождество вида $\varphi_i = \Phi'_i, i = 1, \ldots, b$, и формулы из Φ' (тождества из Π') будем называть **формулами** (соответственно **тождествами**) **перехода от базиса Б к базису Б$'$**.

Для формулы $\mathcal{F}, \mathcal{F} \in \mathcal{U}^{\Phi}_{\text{Б}}$, обозначим через $\Pi'(\mathcal{F})$ формулу над базисом $\text{Б}'$, которая получается из $\mathcal{F}$ заменой каждой ее подформулы вида $\varphi(\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_{k_i})$ формулой $\Phi'_i(\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_{k_i}, x_{k_i+1}, \ldots, x_{k'_i})$, то есть является результатом подстановки формулы $\mathcal{F}_j$ вместо БП x_j в формулу Φ'_i для всех $j, j = 1, \ldots, k_i$. Переход от формулы $\mathcal{F}$ к формуле $\Pi'(f)$ будем называть **структурным моделированием формулы $\mathcal{F}$ в базисе Б$'$ на основе формул перехода** Φ' или, иначе, **на основе тождеств перехода** Π'.

Теорема. Теорема перехода. Пусть τ – КПСТ для ЭП формул из $\mathcal{U}^{\Phi}_{\text{Б}}$, а Π' и Π – системы тождеств для перехода от базиса Б к базису Б$'$ и от базиса Б$'$ к базису Б соответственно. Тогда система тождеств $\{\Pi'(\tau), \Pi'(\Pi)\}$ является КПСТ для ЭП формул из $\mathcal{U}^{\Phi}_{Б'}$.

Этапы доказательства. Конструктивно показать процесс перевода в другой базис (все тождества переводятся в другой базис с помощью системы формул перехода, на их основе производятся тождественные преобразования в другом базисе), преобразований в нем, перевод обратно. □

Следствие. Из системы тождеств $\tau^{\text{осн}}$ для ЭФ формул из $\mathcal{U}^{\Phi}$ указанным в теореме способом можно получить КПСТ для ЭП формул в любом базисе Б.

§6

Ребро или дуга графа с пометкой $x_i(\bar{x}_i)$ называется **замыкающим** (соответственно **размыкающим**) контактом БП x_i.

Сеть Σ с входами $a'_1, \ldots, a'_p$ и выходами $a''_1, \ldots, a''_q$, в которой все ребра (дуги) помечены переменными $x_1, \ldots, x_n$ или их отрицаниями $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$, называется (p,q)-**контактной схемой** (КС) **от БП** $x_1, \ldots, x_n$ и обозначается $\Sigma = \Sigma(x_1, \ldots, x_n)$ или $\Sigma = \Sigma(x_1, \ldots, x_n; a'_1, \ldots, a'_p; a''_1, \ldots, a''_q)$.

Число контактов называется **сложностью** КС Σ и обозначается через $L(\Sigma)$.

Пусть Σ – КС от БП $X(n)$ и $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ – набор из B^n. Определим сеть $\Sigma|_\alpha$ как сеть, получающуюся из Σ в результате удаления всех ребер (дуг) с пометками $x_1^{\bar{\alpha}_1}, \ldots, x_n^{\bar{\alpha}_n}$, то есть ребер, которые не проводят на наборе α, и снятия пометок с остальных ребер Σ. Для вершин v и u КС Σ введем **функцию проводимости от вершины** v **к вершине** u как ФАЛ $g_{u,v}(x_1, \ldots, x_n)$, которая равна 1 на наборе $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in B^n$ тогда и только тогда, когда в сети $\Sigma|_\alpha$ существует $(v-u)$-цепь, то есть тогда и только тогда, когда в Σ имеется цепь из проводящих на наборе α контактов вида $x_1^{\alpha_1}, \ldots, x_n^{\alpha_n}$, идущая из v в u. Будем говорить также, что ФАЛ $g_{v,u}$ является **функцией достижимости вершины** u **из вершины** v, или, иначе, **реализуется между вершинами** v **и** u.

$\mathcal{D}(x_1, \ldots, x_n; 1; a_0, \ldots, a_{2^n-1})$ – $(1, 2^n)$**-контактное дерево порядка** n **от БП** $X(n)$.

Схемы Σ' и Σ'' считаются **изоморфными**, если изоморфны соответствующие им графы, и **эквивалентны**, если они реализуют равные системы ФАЛ.

Для множества C, состоящего из контактов вида $x_{i_1}^{\sigma_1}, \ldots, x_{i_r}^{\sigma_r}$ в КС Σ, определим его **функцию проводимости** $K(C)$ и **функцию отделимости** $J(C)$ как ФАЛ вида $x_{i_1}^{\sigma_1} \cdots x_{i_r}^{\sigma_r}$ и $x_{i_1}^{\bar{\sigma}_1} \vee \cdots \vee x_{i_r}^{\bar{\sigma}_r}$ соответственно. Множество C называется **проводящим** (**отделимым**), если $K(C) \neq 0 (J(C) \neq 1)$, и **нулевым** (соответственно **единичным**) в противном случае.

Лемма. Любой π-схеме Σ можно сопоставить эквивалентную ей формулу $\mathcal{F}$ из $\mathcal{U}^{\Phi}$ с поднятыми отрицаниями такую, что $R(\mathcal{F}) = L(\Sigma)$ и обратно.

Этапы доказательства. Основано на моделировании букв одним ребром, дизъюнкции – параллельным соединением, конъюнкции – последовательным соединением. Сложность высчитывается простым сложением. □

Схема, моделирующая совершенную ДНФ ФАЛ f, называется **канонической** КС для этой ФАЛ.

Будем называть $(1,m)$-КС **приведенной**, если все изолированные вершины Σ являются ее полюсами, а все контакты и остальные вершины Σ принадлежат простым проводящим цепям, соединяющим ее вход и выходы. При этом КС $\hat{\Sigma}$, которая получается из КС Σ удалением «лишних», то есть не принадлежащих цепям указанного вида, неполюсных вершин и контактов, является эквивалентной Σ приведенной КС такой, что $L(\hat{\Sigma}) \leq L(\Sigma)$.

Лемма. При любых натуральных L и n выполняется неравенство $||\mathcal{U}^{\pi}(L,n)|| \leq (12n)^L$.

Этапы доказательства. В силу предыдущей леммы, это эквивалентно утверждению, что число попарно неэквиалентных формул с поднятыми отрицаниями не более $(16n)^L$ (12 вместо 16 получается из-за того, что что мы умножаем на 2 не 8 (как в оригинальной оценке), а 6, потому что нет отрицаний). Рассмотрим формулы от удвоенного количества БП, воспользуемся теоремой об оценке количества неэквивалентных формул (второй из трех), учтем связь между рангом и длиной и получим нужную оценку. □

Лемма. При любых натуральных L и n выполняется неравенство $||\mathcal{U}^{K}(L,n)|| \leq (8nL)^L$.

Этапы доказательства. Выделить остовное дерево $\mathcal{D}$, потом получить наддерево $\mathcal{D}'$, присоединив каждое не вошедшее в $\mathcal{D}$ ребро схемы к одной из своих концевых вершин, отличных от входа, затем получить $\mathcal{D}''$, ориентировав ребра по направлению к корню. Число таких деревьев не более $(8n)^L$. Заметим также, что КС может быть получена в результате присоединения каждого листа дерева $\mathcal{D}''$ к одной из его вершин, отличной от выхода. Следовательно, получаем оценку. $\square$

Любая симметрическая, транзитивная и рефлексивная матрица $F, F \in (P_2(n))^{m,m}$, реализуется КС $\Sigma = \Sigma(x_1, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_m)$, которая представляет собой объединение всех КС $\Sigma_{ij} = \Sigma_{ij}(x_1, \ldots, x_n; a_i, a_j)$, где $1 \leq i < j \leq m$, а КС Σ_{ij} является π-схемой и построена по совершенной ДНФ ФАЛ $F\langle i, j\rangle$ и считается **канонической КС матрицы** F.

§7

Лемма. Имеет место выводимость $\{t_1 - t_5, t_6^{(1)}, t_6^{(2)}\} \rightrightarrows \{t_7 - t_{11}\}$.

Этапы доказательства. t_7 выводится применением к t_5 с совпадающими вершинами тождества t_6. t_8 – применить к x_1 t_4, потом к однородным метелкам t_5, потом t_3. t_9 – t_7 и $t_6^{(2)}$. t_{10} – t_7 и t_5. t_{11} – с помощью t_{10} делаем первый треугольник, который потом расширяем с помощью t_5. $\square$

Лемма. При $n \geq 2$ имеет место выводимость $\tau_n \rightrightarrows \tau^{(n)}$.

Этапы доказательства. t_2, t_9 – очевидно, из самих себя. 8,3,4,5 – по индукции. 7 из 2 и 5; 10 и 11 из 7 и 5. $\square$

§8

Каноническая КС порядка n представляет собой объединение канонических $(1,1)$-КС вида $\hat{\Sigma}_{ij}(x_1, \ldots, x_n; a_i, a_j)$, построенных на основе совершенных ДНФ ФАЛ проводимости от a_i к a_j для всех i и j таких, что $1 \leq i < j \leq m$.

Каноническая цепь порядка n – любая цепь $I_i^{(n)}$, где $i \in [1, 2^n]$, а также любая цепь, которая получается из $I_i^{(n)}$ перестановкой контактов

КС $\hat{\Sigma}(x_1, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_m)$ является канонической КС порядка n тогда и только тогда, когда она обладает следующими свойствами:

1. любой контакт $\hat{\Sigma}$ принадлежит некоторой канонической цепи порядка n, являющейся подсхемой схемы $\hat{\Sigma}$, причем полюсами этой подсхемы служат только концевые вершины данной цепи;

2. любая внутренняя вершина $\hat{\Sigma}$ является внутренней вершиной некоторой цепи из пункта 1;

3. в КС $\hat{\Sigma}$ отсутствуют «висячие циклы» и «параллельные» цепи, то есть канонические цепи порядка n из пункта 1, которые соединяют одни и те же полюса и реализуют равные ЭК;

4. в КС $\hat{\Sigma}$ нет существенных транзитных проводимостей, то есть наличие цепей вида $I_i^{(n)}$, соединяющих полюс a_j с полюсом a_k и полюс a_k с полюсом a_t, влечет наличие цепи такого же вида, соединяющей полюс a_j с полюсом a_t.

Лемма. Для любой КС Σ, где $\Sigma \in \mathcal{U}^K$ и $\Sigma = \Sigma(x_1, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_m)$, и любой эквивалентной Σ КС $\hat{\Sigma}(x_1, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_m)$ канонического вида существует ЭП $\Sigma \underset{\tau_n}{\rightrightarrows} \hat{\Sigma}$.

Этапы доказательства. $\Sigma \Rightarrow \Sigma_1 \Rightarrow \Sigma_2 \Rightarrow \Sigma_3 \Rightarrow \Sigma_4 = \hat{\Sigma}$. Схема Σ_i обладает свойставами 1 – i канонической КС. $\Sigma \Rightarrow \Sigma_1$ – с помощью применения к каждому контакту тождества $t_4^{(n)}$. Теперь КС состоит из канонических цепей порядка n. $\Sigma_1 \Rightarrow \Sigma_2$ – с каждой внутренней вершиной, из которой выходит некоторое количество (возможно и 1) однородных звезд различных цепей, проводим следующие операции. Каждую звезду заменяем на цикл по тождеству $t_{11}^{(n)}$. Добавляем "ненужные" висячие вершины, чтобы можно было применить тождество $t_3^{(n)}$ и удалить "мешающую" вершину. Удалив таким образом все внутренние вершины, не являющиеся внутренними вершинами канонических цепей, из Σ_1 получили Σ_2. $\Sigma_2 \Rightarrow \Sigma_3$ – с помощью $t_6^{(n)}$ и t_7^n, $\Sigma_3 \Rightarrow \Sigma_4$ с помощью $t_{10}^{(n)}$. $\square$

Теорема. Для любых двух эквивалентных КС Σ' и Σ'' от БП $x_1, \ldots, x_n$ существует ЭП вида $\Sigma' \underset{\tau_n}{\rightrightarrows} \Sigma''$.

Этапы доказательства. Фактически, два раза использовать лемму и один раз $t_2^{(n)}$. $\square$

Следствие. Система τ_n является КПСТ для ЭП КС из $\mathcal{U}^K$ от БП $x_1, \ldots, x_n$.

Следствие. Система τ_∞ является ПСТ для ЭП КС из $\mathcal{U}^K$.

$\Theta(\Sigma, \alpha) = |E(\Sigma|_\alpha)| - |V(\Sigma|_\alpha)| + |c(\Sigma|_\alpha)|$. $\Theta(\Sigma) = \sum\limits_{\alpha \in B^n} \Theta(\Sigma, \alpha)$.

Лемма. Если $\Sigma'(x_1, \ldots, x_n) \underset{\{t_1 - t_5\}}{\rightrightarrows} \Sigma''(x_1, \ldots, x_n)$, то $\Theta(\Sigma') = \Theta(\Sigma'')$, а если $\Sigma' \underset{\tau_k}{\rightrightarrows} \Sigma''$, где $k < n$, то $\Theta(\Sigma') - \Theta(\Sigma'')$ делится на 2^{n-k}.

Этапы доказательства. Доказать, что Θ не меняется при использовании тождеств $t_1 \ldots t_5$ с помощью простого перебора. Затем, заметить, что если проводит на наборе α, то он проводит на 2^{n-m} наборах, следовательно разность делится на 2^{n-m}, а значит, на 2^{n-k}. $\square$

Теорема. В классе $\mathcal{U}^K$ не существует конечной полной системы тождеств.

Этапы доказательства. От противного: если ограничить число БП, например, числом n, то t_6^{n+1} не выводится. Чтобы это доказать, надо рассмотреть левую часть этого тождества. Разность функций Θ не делится на 2, что противоречит предыдущей лемме, следовательно нет вывода. $\square$

§9

В основе большинства структурных преобразований схем лежит ряд операций, которые обобщают операцию суперпозиции функций и используются для построения сложных схем из более простых. Базисом таких построений является обычно схема из одной изолированной вершины, являющейся ее входом. Указанная вершина называется **тождественной вершиной кратности** $k, k \geq 0$, если она одновременно является k-кратным выходом данной схемы. Кратность один не указывается, тождественная вершина кратности 0 считается **фиктивной**.

Простейшие виды суперпозиции схем:

1. операция **переименования входов схемы** с возможным их отождествлением;
2. операция **переименования выходов схемы** с возможных их отождествлением;
3. операция **объединения схем**, не имеющих общих вершин и общих вход-выходных пометок, понимаемая, как обычное объединение соответствующих графов.

Схема Σ имеет вид $\Sigma = \Sigma''(\Sigma')$, то есть является **суперпозицией схем** Σ'' **и** Σ' без общих вершин и вход-выходных пометок, если она получается в результате объединения этих схем и присоединения (части) входов схемы Σ'' к (некоторым) выходам схемы Σ'. Указанная суперпозиция считается **бесповторной**, если различные входы Σ'' присоединяются к различным выходным вершинам Σ'. Суперпозиция вида $\Sigma = \Sigma''(\Sigma')$ называется **стыковкой**, если число входов схемы Σ'' равно числу выходов схемы Σ' и каждый вход Σ'' присоединяется к выходу Σ' с тем же номером.

Для суперпозиции схем вида $\Sigma = \Sigma''(\Sigma')$ характерно, как правило, то, что схема Σ реализует функции, получающиеся в результате соответствующей подстановки (всех или части) функций, реализованных схемой Σ' вместо (всех или части) входных переменных схемы Σ''. В случае стыковки, например, это означает, что схема Σ реализует набор функций вида $\mathcal{F}''(\mathcal{F}')$, где $\mathcal{F}''$ и $\mathcal{F}'$ – наборы функций, реализованные схемами Σ'' и Σ' соответственно. Суперпозиция $\Sigma = \Sigma''(\Sigma')$ считается **правильной**, если схема Σ обладает указанным свойством, и **корректной**, если, кроме того, в любой вершине Σ, которая соответствет выходной вершине Σ', реализуется та же самая функция, что и в Σ'.

Будем допускать наличие в КС вентилей и неориентированных ребер без пометок, которые проводят при любых значениях управляющих входных БП и называются **проводниками**.

Стыковка (суперпозиция) КС вида $\Sigma = \Sigma''(\Sigma')$ называется **правильной**, если для матриц F, F' и F'', реализуемых КС Σ, Σ' и Σ'' соответственно, выполняется равенство $F = F' \cdot F''$.

Указанная суперпозиция считается **корректной**, если, кроме того, в выходных вершинах подсхемы Σ'' схемы Σ реализуются те же самые столбцы ФАЛ, что и в самой схеме Σ.

Схема называется **разделительной по входам** (**выходам**), если ФАЛ проводимости между любыми ее различными входами (соответственно выходами) равна 0.

КС Σ от БП $x_1, \ldots, x_n$ **разделительна на наборе** $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ значений этих БП, если соответствующей разделительностью обладает сеть $\Sigma|_\alpha$.

Лемма. Пусть КС Σ является результатом стыковки вида $\Sigma = \Sigma''(\Sigma')$, а F, F' и F'' – матрицы, реализуемые КС Σ, Σ' и Σ'' соответственно. Тогда $F \geq F' \cdot F''$ и $F = F' \cdot F''$, если КС Σ'' разделительная по входам или КС Σ' разделительная по выходам.

Этапы доказательства. Рассмотрим случай бесповторной стыковки. q – количество выходов (входов) у Σ' (Σ''). Сначала надо доказать, что $f \geq f'_1 \cdot f''_2 \vee \cdots \vee f'_q \cdot f''_q$ (равенство при разделительности). Для этого рассмотреть проводимость цепей через указанные вершины. Фактически, f – строка матрицы F. В случае отождествления входов имеет место поразрядная дизъюнкция строк. Стыковка общего вида сводится к отождествлению входов и бесповторной стыковки. В силу ассоциативности произведения матриц неравенство сохраняется. □

Следствие. В случае разделительности КС Σ'' по входам в каждой вершине К $\Sigma, \Sigma = \Sigma''(\Sigma)$, которая соответствует выходу КС Σ', реализуется тот же самый столбец ФАЛ, что и в КС Σ', то есть рассматриваемая суперпозиция является корректной.

Следствие. Равенство $F = F' \cdot F''$ выполняется на любом наборе значений БП, на котором КС Σ'' разделительна по входам или КС Σ' разделительна по выходам.

§10

Каскадная КС – приведенная КС без изолированных полюсов, которая может быть получена из системы тождественных вершин в результате ряда операций присоединения одного или двух противоположных контактов и операций переименования выходов. Каскадная КС (ККС) считается **полной**, если она была построена без использования операции присоединения одного контакта.

Вершина ККС, введенная в нее с помощью операции присоединения одного контакта, называется **неполной вершиной** этой ККС. Будем говорить, что ККС Σ'' является дополнением неполной ККС Σ', если она получается в результате соединения всех неполных вершин Σ' отсутствующими в них контактами с новым входом, удаления всех "старых" входов и перехода к соответствующей приведенной КС.

Дополнение Σ'' к полной ККС Σ с 1 входом будем называть **инверсной** к Σ' ККС.

Лемма. Если $(1, m)$- ККС Σ' реализует систему ФАЛ $\mathcal{F}' = (f'_1, \ldots, f'_m)$, то существует $(1, m)$-ККС Σ'', которая реализует систему ФАЛ $\bar{\mathcal{F}}' = (\bar{f}'_1, \ldots, \bar{f}'_m)$, и для которой $L(\Sigma'') \leq 2L(\Sigma')$.

Этапы доказательства. В силу утверждения о том, что $L(\Sigma'') \leq 2L(\Sigma')$, где Σ'' – дополнение Σ'. □

Схема с одним входом и двумя выходами называется **двоичной решающей диаграммой**, если она состоит из ориентированных контактов и не имеет (ориентированных) циклов, а из каждой ее вершины v, отличной от выходов, исходят две дуги с противоположными пометками вида $x_i, \bar{x}_i$. При этом вершине, обычно, сопоставляют пометку x_i (0, 1 для выходных), а пометки x_i и $\bar{x}i$ у исходящих ребер заменяют пометками 0 и 1 соответственно.

Схема Σ, $\Sigma \in \mathcal{U}^C_{\text{Б}}$, с монотонной нумерацией вершин называется **вычисляющей программой** (ВП) над базисом Б. Используя вычисляющую программу, последовательно просматриваются вершины в соответствии с их номерам и результаты сохраняются в памяти. Входные вершины выполняют "команды ввода", а вершины, помеченные ФС – "команды вычисления".

Значение БП u_i, вычисленное в момент времени i, $i \in (n, p]$, занимает отдельную битовую ячейку памяти на отрезке времени $[i, a_i)$, где a_i – максимальный номер команды, в которой встречается u_i. Максимальное число отрезков вида $[i, a_i)$, где $i \in (n, p]$, имеющих непустое пересечение, называется **шириной** ВП Σ.

Лемма. Для любой ФАЛ существует реализующая ее ВП над базисом $Б_0$ ширины не больше, чем 2.

Этапы доказательства. Покажем, что любая ДНФ после оптимизации по числу отрицаний переходит в ВП ширины 2. Оптимизированную по числу отрицаний ДНФ можно вычислять так: в одной внутренней БП хранится значение ДНФ, а в другой вычисляемой импликанты.

3

§1

Функционал сложности Ψ обладает свойством **монотонности**, то есть $\Psi(\Sigma) \geq \Psi(\Sigma')$, если $\Sigma, \Sigma' \in \mathcal{U}$, и Σ' получается из Σ в результате удаления вершин или ребер.

Сложность $\Psi(F)$ системы ФАЛ F относительно функционала Ψ в классе $\mathcal{U}$ – минимальное значение величины $\Psi(\Sigma)$ на множестве тех схем Σ из $\mathcal{U}$, которые реализуют F.

Схема, принадлежащая классу $\mathcal{U}$, которая реализует F и для которой $\Psi(\Sigma) = \Psi(F)$, называется **минимальной** схемой в классе $\mathcal{U}$ относительно функционала Ψ.

Величину $\Psi(F)$, в том случае когда функционал Ψ совпадает с введенным в главе 2 функционалом L (D, R, и т. д.), будем называть **сложностью** (соответственно **глубиной, рангом**, и т. д.) системы ФАЛ F.

Функцией Шеннона для класса $\mathcal{U}$ относительно функционала сложности Ψ называется $\Psi(n) = \max\limits_{f \in P_2(n)} \Psi(f)$.

Лемма. Для любой функции алгебры логики $f(x_1, \ldots, x_n)$, $f \neq 0$, существуют формула $\mathcal{F}_f, \mathcal{F}_f \in \mathcal{U}^\Phi$, и π-схема Σ_f, которые реализуют f и для которых справедливы неравенства: $L(\mathcal{F}_f) \leq 2n \cdot |N_f| - 1$, $L(\Sigma_f) \leq n|N_f|$.

Этапы доказательства. В качестве $\mathcal{F}_f$ возьмем совершенную ДНФ. В ней $|N_f|$ ЭК, соответственно $|N_f| - 1$ дизъюнкций. В каждой ЭК n БП, соответственно $n-1$ конъюнкций. Также над каждой БП может быть отрицание. Таким образом, получаем $L(\mathcal{F}_f) \leq |N_f| - 1 + |N_f| \cdot (n - 1 + n) = 2n \cdot |N_f| - 1$. В π-схеме совершенной ДНФ будет $|N_f|$ цепей от одного полюса до другого по n контактов. $L(\Sigma_f) = n|N_f|$. □

Следствие. В силу предыдущей леммы, с учетом того, что ФАЛ 0 можно реализовать π-схемой сложности 2, а также формулой из $\mathcal{U}^\Phi$, имеющей сложность 2, выполняются неравенства $L^C(n) \leq L^\Phi(n) \leq n \cdot 2^{n+1} - 1$, $L^K(n) \leq L^\pi(n) \leq n \cdot 2^n$

Следствие. В силу предыдущего следствия и с учётом следствия 2 из теоремы 2.1 главы 2 справедливо неравенство $D(n) \leq n + \lceil \log n \rceil + 2$.

Лемма. Для любой ФАЛ f, $f \in P_2(n)$ и $f \neq 0$, существуют π-схема Σ_f и формула $\mathcal{F}_f, \mathcal{F}_f \in \mathcal{U}^\Phi$, которые реализуют f и для которых, наряду с первой леммой, справедливы также неравенства: $L(\Sigma_f) \leq 2^n + |N_f| - 2$, $L(\mathcal{F}_f) \leq 2^{n+1} + |N_f| - 4$.

Этапы доказательства. В качестве Σ_f возьмем $(1, 2^n)$ КД, из которого удалим выходы, где реализуются ЭК, не входящие в совершенную ДНФ f, и отождествим все оставшиеся выходы. Удалили $2^n - |N_f|$ выходов. В КД было $2 \cdot 2^n - 2$ контактов. Получим $L(\Sigma_f) \leq 2 \cdot 2^n - 2 - (2^n - |N_f|) = 2^n + |N_f| - 2$. Формулу $\mathcal{F}_f$ получим, моделируя Σ_f. $R(\mathcal{F}_f) = L(\Sigma_f)$, количество конъюнкций и дизъюнкций равно $R(\mathcal{F}_f) - 1$. Таким образом $L(\mathcal{F}_f) = R(\mathcal{F}_f) + L^-(\Sigma_f) - 1$, где $L^-(\Sigma_f)$ – число размыкающих контактов в Σ_f. $L^-(\Sigma_f) \leq 2^n - 1$, $L(\mathcal{F}_f) \leq 2^{n+1} + |N_f| - 4$. □

Следствие. $L^\pi(n) \leq 2^{n+1} - 2$, $L^\Phi(n) \leq 3 \cdot 2^n - 4$

Пусть вершина w СФЭ Σ не достижима из ее вершины v, а СФЭ Σ' получается из СФЭ Σ в результате удаления вершины v, объявления вершины w начальной вершиной всех исходивших из v дуг и переноса в вершину w всех выходных БП, приписанных вершине v. Тогда СФЭ Σ' считается результатом применения к СФЭ Σ **операции присоединения вершины** v к вершине w. Две вершины СФЭ называются **эквивалентными**, если в них реализуются равные ФАЛ. Приведенная схема называется **строго приведенной**, если в ней нет эквивалентных вершин.

Для множества ФАЛ G, $G \subseteq P_2(n)$, через $\vec{G}$ будем обозначать систему, состоящую из всех различных ФАЛ множества G, упорядоченных в соответствии с номерами их столбцов значений. При этом систему ФАЛ $\vec{P}_2(n)$ будем называть **универсальной системой** порядка n.

Лемма. Для каждого натурального n в $\mathcal{U}_Б^C$ существует универсальная СФЭ U_n порядка n, сложность которой равна $2^{2^n} - n$.

Этапы доказательства. В $\mathcal{U}_Б^C$ существует система формул, реализующая систему ФАЛ $\vec{P}_2(n)$. После присоединения эквивалентных вершин и удаления висячих вершин, получится СФЭ U_n, у которой ровно 2^{2^n} вершин, включая n входов (функций в $\vec{P}_2(n)$ ровно 2^{2^n}, все вершины различны, значит, мы не можем получить ни больше, ни меньше вершин). Получим $L(U_n) = 2^{2^n}$. $\Box$

Следствие. $L^C_\text{Б}(\vec{P}_2(n)) \le 2^{2^n} - n$.

Лемма. Для любого натурального n выполняются неравенства: $L^C(\vec{Q_n}) \le 2^n + O(n \cdot 2^{\frac{n}{2}})$, $L^K(\vec{Q_n}) \le 2^{n+1} - 2$, $L^C(\vec{J_n}) \le 2^n + O(n \cdot 2^{\frac{n}{2}})$, $L^K(\vec{J_n}) \le 2^{n+2} - 4$, $L^\pi(\mu_n) \le 3 \cdot 2^n - 2$, $L^\Phi(\mu_n) \le 2^{n+2} - 3$, $L^C(l_n) \le 4n - 4$, $L^C(\bar{l}_n) \le 4n - 4 + \lfloor \frac{1}{n} \rfloor$.

Этапы доказательства. Разобьем БП $X(n)$ на две группы $x' = (x_1, \ldots, x_q), x'' = (x_{q+1}, \ldots, x_n), q = \lceil \frac{n}{2} \rceil$. Дешифраторы Σ', Σ'' – от x', x'' соответственно, реализующие свои системы ЭК по первой лемме. Объединим схемы, конъюнктируя каждую пару выходов. Для этого понадобится 2^n ФЭ &, их выходы считаем выходом Σ. Получим два дешифратора сложностью $n \cdot 2^{\frac{n}{2}}$ и 2^n ФЭ &. Откуда и выходят неравенства для $L^C(\vec{Q_n})$ и $L^C(\vec{J_n})$.

Для $L^K(\vec{Q_n})$ построим $(1, 2^n)$-КД. Его сложность $2^{n+1} - 2$. Сложность инверсной схемы (схемы для $\vec{J_n}$) не превосходит ее более, чем в два раза.

Для $L^\pi(\mu_n)$ построим $(1, 2^n)$-КД. Его выходы соединим с выходом мультиплексора контактами с пометками $y_0, \ldots, y_{2^n-1}$. Сложность получившейся схемы будет $3 \cdot 2^n - 2$. Промоделируя π-схему, получим формулу сложности $4 \cdot 2^n - 3$ (надо просто аккуратно расписать моделирование КД).

Схема, реализующая $x_1 \oplus x_2$ – $\Sigma_2^\oplus$ имеет сложность 4. $\Sigma_n^\oplus$ является композицией $n - 1$ схемы $\Sigma_2^\oplus$. Схема для $\bar{l}_n$ получается из схемы для l_n заменой всех ФЭ & на $\vee$ и всех ФЭ $\vee$ на &. $\Box$

§2

Лемма. Если ФАЛ $f(x_1, \ldots, x_n)$ существенно зависит от всех своих БП, то $L^C(f) \ge n-1$, $L^K(f) \ge n$. Если при этом ФАЛ f не является монотонной ФАЛ (каждая БП $x_i, i \in [1, k]$, не является ни монотонной, ни инмонотонной БП ФАЛ f), то $L^C(f) \ge n$ (соответственно, $L^K(f) \ge n + k$).

Этапы доказательства. Если ФАЛ f существенно зависит от всех БП, то ранг минимальной СФЭ Σ_f не меньше n. Тогда $L^C(f) \ge L_{\vee,\&}(\Sigma_f) \ge n - 1$. Если ФАЛ f не монотонна, то должен быть еще хотя бы один ФЭ $\neg$, поэтому $L^C(f) \ge n$.

Поскольку ФАЛ f существенно зависит от всех БП, в минимальной КС Σ_f должны быть контакты с пометками x_i или $\bar{x}_i$, $i \in [1, n]$. Если при этом k БП не являются ни монотонными, ни инмонотонными БП ФАЛ f, то в Σ_f должно быть k замыкающих и k размыкающих контактов. Таким образом, $L^K(f) \ge n + k$. $\Box$

Следствие. $L^C(l_n) \ge n$, $L^K(l_n) \ge 2n$, $L^C(\mu_n) \ge 2^n + n$, $L^K(\mu_n) \ge 2^n + 2n$.

Лемма. Для системы $F = (f_1, \ldots, f_m)$, состоящей из попарно различных ФАЛ отличных от констант (от переменных), справедливо неравенство $L^K(F) \ge m$ (соответственно, $L^C_\text{Б}(F) \ge m$).

Этапы доказательства. Σ_F – приведенная $(1, m)$-КС, реализующая F. Σ_F – связный граф с не менее, чем $m + 1$ вершиной. Следовательно, $L(\Sigma_F) \ge |V(\Sigma_F)| - 1 \ge m$. Второе неравенство вытекает из того, что $f_i, i \in [1, m]$ реализуются на попарно различных выходах СФЭ, отличных от ее входов. $\Box$

Следствие. $L^C(\vec{Q_n}) \ge 2^n$, $L^K(\vec{Q_n}) \ge 2^n$, $L^C(\vec{J_n}) \ge 2^n$, $L^K(\vec{J_n}) \ge 2^n$, $L^C_\text{Б}(\vec{P}_2(n)) \ge 2^{2^n} - n$, $L^K(\vec{P}_2(n)) \ge 2^{2^n} - 2$.

Замечание В силу следствия универсальная СФЭ U_n, построенная в лемме 1.3, является минимальной по сложности СФЭ в классе $\mathcal{U}^C_\text{Б}$

Обозначим через $\mathcal{U}(\Psi, n)$ множество тех схем Σ, $\Sigma \in \mathcal{U}$, которые реализуют одну ФАЛ из $P_2(n)$ и для которых $\Psi(\Sigma) \le \Psi$. Следующее "мощностное" равенство вытекает непосредственно из определений: $||\mathcal{U}(\Psi(n), n)|| = 2^{2^n}$

Заметим также, что если для некоторого натурального n и действительных $\widehat{\Psi}, \delta$, где $0 < \delta < 1$, выполняется неравенство $||\mathcal{U}(\widehat{\Psi}, n)|| \le \delta \cdot 2^{2^n}$, то $\Psi(f) \ge \widehat{\Psi}$

Лемма. Для положительных действительных чисел a, y, q из неравенств $a \log q > 1$, $(ay)^y \ge q$, следует неравенство $y \ge \frac{\log q}{\log(a \log q)}(1 + \frac{\log\log(a \log q)}{\log(ae \log q)})$, где e – основание натурального логарифма, а из неравенств $a > 1$, $a^y \ge q$ – неравенство $y \ge \frac{\log q}{\log a}$.

Этапы доказательства. Второе неравенство вытекает непосредственно из определения логарифма. Докажем первое неравенство. Рассмотрим случай, когда $a = 1, \log q > 1$. Возьмем y' равным правой части неравенства. Тогда можно показать, что $y' \log y' \le \log q$, и получим, что доказыаемое неравенство верно, используя условие $(ay)^y \ge q$. При $a > 0$, $(ay)^y \ge q$ эквивалентно $(ay)^{ay} \ge q^a$. И доказываемое неравество получается из $y \ge y'$ заменой y на ay и $\log q$ на $a \log q$. $\square$

Теорема. Для некоторой последовательности $\varepsilon = \varepsilon(n)$, $n = 1, 2, \ldots$, такой, что $\varepsilon(n) \ge 0$ при $n \ge n_0$ и $\varepsilon(n)$ стремится к 0 при n стремящемся к бесконечности, для почти всех ФАЛ $f, f \in P_2(n)$, выполняются неравенства $L^C(f) \ge (1+\varepsilon(n))\frac{2^n}{n}$, $L^\Phi(f) \ge (1-\varepsilon(n))\frac{2^n}{\log n}$, $L^K(f) \ge (1-\varepsilon(n))\frac{2^n}{n}$, $L^\pi(f) \ge (1-\varepsilon(n))\frac{2^n}{\log n}$, $D(f) \ge n - \log\log n - \varepsilon(n)$.

Этапы доказательства. Воспользуемся неравенствами $||\mathcal{U}^C(L,n)|| \le (8(L+n))^{L+1}$, $||\mathcal{U}^\Phi(L,n)|| \le (8n)^{L+1}$, $||\mathcal{U}^K(L,n)|| \le (8nL)^L$. А также замечанием о том, что если для некоторых $n, \widehat{\Psi}, 0 < \delta < 1$ выполняется $||\mathcal{U}(\widehat{\Psi}, n)|| \le \delta \cdot 2^{2^n}$, то $\Psi(f) \ge \widehat{\Psi}$ для не менее чем $(1-\delta)\cdot 2^{2^n}$ ФАЛ f из $P_2(n)$. Искомые неравенства получим, подставляя особым образом подобранные δ, a, y и q в предыдущую лемму и указанное утверждение. $\square$

Следствие. $L^C(n) \gtrsim \frac{2^n}{n}$, $L^\Phi(n) \gtrsim \frac{2^n}{\log n}$, $L^K(n) \gtrsim \frac{2^n}{n}$, $L^\pi(n) \gtrsim \frac{2^n}{\log n}$.

§3

Лемма. Для любого натурального n и $\sigma \in B$ выполняются неравенства: $L^K(l_n^\sigma) \le 4n - 4 + \left\lfloor \frac{1}{n} \right\rfloor$, $L^K(\vec{P}_2(n)) \le 2 \cdot 2^{2^n}$.

Этапы доказательства. Оценка для линейной функции напрямую следует из построения схемы Кардо. При этом $\left\lfloor \frac{1}{n} \right\rfloor$ нужно для случая, когда $n = 1$. Для получения второй оценки обратимся к Михаилу. $\square$

Теорема. Для функций Шеннона $L^K(n)$ и $L^C(n)$ выполнены соотношения: $L^K(n) \lesssim 4\frac{2^n}{n}$, $L^C(n) \lesssim 8\frac{2^n}{n}$.

Этапы доказательства. Применим метод Шеннона синтеза ФАЛ путем разложения функции по $(n-q)$ последним переменным. КС (СФЭ) для ФАЛ f представляет собой суперпозицию универсального многополюсника порядка q и мультиплексора порядка $(n-q)$. Взяв параметр q нужным образом, а также воспользовавшись результатом предыдущих оценок сложности этих схем получим требуемые оценки. $\square$

§4

Дизъюнктивно-универсальное множество (ДУМ) порядка m и ранга p – множество ФАЛ $G, G \subseteq P_2(m)$ такое, что любая ФАЛ $g, g \in P_2(m)$, может быть представлена в виде $g = g_1 \vee \ldots \vee g_p$, где $g_i \in G$ при всех $i, i = 1, \ldots, p$. Стандартный способ построения таких множеств связан с разбиениями единичного куба.

$\Pi = (\pi_1, \ldots, \pi_p)$ – разбиение куба B^m, и пусть для всех $i, i = 1, \ldots, p$, ФАЛ $\psi_i(x_1, \ldots, x_,)$ – характеристическая ФАЛ множества π_i, а $G^{(i)}$ – множество всех тех ФАЛ $g, g \in P_2(m)$, которые обращаются в 0 вне π_i. Заметим, что множества ФАЛ G вида $G = G^{(1)} \cup \ldots \cup G^{(p)}$ является ДУМ порядка m и ранга p. Действительно, любая ФАЛ $g, g \in P_2(m)$, может быть представлена в виде $g = g_1 \vee \ldots \vee g_p$, где $g_i = \psi_i g$ и, следовательно, $g_i \in G^{(i)}$ для всех $i, i = 1, \ldots, p$. Заметим также, что мощность множества $G^{(i)}, i = 1, \ldots, p$, равна 2^{s_i}, где $s_i = |\pi_i|$, и что множество $G^{(i)} \cap G^{(j)}$ состоит из ФАЛ, тождественно равной 0, если $1 \le i < j \le p$. Следовательно, $\lambda = |G| = \sum_{i=1}^{p} |G^{(i)}| - (p-1) \le \sum_{i=1}^{p} 2^{s_i} \le p2^s$, где $s = \max_{1 \le i \le p} s_i$. Такое ДУМ G – ДУМ, **связанное с разбиением** Π. Компоненты разбиения Π – **полосы** ДУМ G, ФАЛ $\chi_{\delta_1}, \ldots, \chi_{\delta_p}$ – **характеристические** ФАЛ. Заметим, что характеристические ФАЛ попарно ортогональны, то есть одновременно в 1 не обращаются, и принадлежат G. Представление $g = g_1 \vee \ldots \vee g_p$ в случае рассматриваемого ДУМ G равносильно $g = \psi_1 g_1 \vee \ldots \vee \psi_p g_p$.

Стандартное ДУМ – ДУМ порядка m и высоты s, где $s \le 2^m$, связанное с разбиением $\Pi = (\pi_1, \ldots, \pi_p)$ куба B^m на последовательные отрезки, для которого номер любого набора из множества π_i меньше номера любого набора из множества π_j, если $i < j$, и выполнены соотношения $p = \left\lceil \frac{2^m}{s} \right\rceil, s_1 = s_2 = \dots = s_{p-1} = s, s_p = 2^m - (p-1)s \leq s$.

Лемма. Для любых натуральных p, m и s, где $p = \left\lceil \frac{2^m}{s} \right\rceil$, существует стандартное ДУМ G порядка m и высоты s, которое является ДУМ ранга p и для которого:

1. $\lambda = |G| \leq p2^s$
2. система из p ортогональных характеристических $\psi_1, \dots, \psi_p$ ДУМ G обладает тем свойством, что для любой ФАЛ $g, g \in P_2(m)$, и некоторых ФАЛ $g_1, \dots, g_p$ из G справедливо не только представление $g = g_1 \vee \ldots \vee g_p$, но и $g = \psi_1 g_1 \vee \ldots \vee \psi_p g_p$.

Этапы доказательства. По построению стандартного ДУМ. □

Теорема. Метод Лупанова. Для любой ФАЛ $f, f \in P_2(n)$, существует реализующая ее СФЭ $\Sigma_f, \Sigma_f \in \mathcal{U}^C$, такая, что $L(\Sigma_f) \leq \frac{2^n}{n}(1 + \frac{5\log n + O(1)}{n})$.

Этапы доказательства. Как и в методе Шеннона, разложим ФАЛ f по $(n-q)$ последним переменным. Найдем СФЭ, реализующую ФАЛ f, в виде $\Sigma_f = \Sigma''(\Sigma')$, где Σ'' – мультиплексор порядка $(n-q)$, а Σ' реализует систему функций, которая реализует все ФАЛ вида $f_{\sigma''}(x')$, где $x' = (x_1, \dots, x_q), \sigma'' \in B^{n-q}$, и $f_{\sigma''}(x') = f(x', \sigma'')$. Каждая такая ФАЛ будет реализована, как дизъюнкция характеристических ФАЛ стандартного ДУМ G.

Построим стандартное ДУМ G порядка q и высоты $s \leq 2^q$. Σ_G – СФЭ, которая реализует систему ФАЛ $\vec{G}$ и представляет собой объединение схем, построенные моделированием функций их совершенными ДНФ. В G не более $p \cdot 2^s$ функций, в каждой из которых не более 2^q единиц. Тогда, по лемме о сложности ФСЭ, реализующей совершенную ДНФ функции, получим: $L(\Sigma_G) \leq 3p2^{s+q}$. Сложность мультиплексора уже рассматривалась. $L(\Sigma'') \leq 4 \cdot 2^{n-q}$.

Для реализации каждой ФАЛ $f_{\sigma''}(x')$ нужно $(p-1)$ ФЭ $\vee$. Всего таких ФАЛ 2^{n-q}. Таким образом получим схему Σ': $L(\Sigma') = 2^{n-q}(p-1) + L(\Sigma_G)$. $L(\Sigma_f) \leq 2^{n-q}(p-1) + 4 \cdot 2^{n-q} + 3p2^{s+q}$. Взяв параметры s, m, q нужным образом, получим требуемую оценку. □

Следствие. $L^C(n) \sim \frac{2^n}{n}$.

§5

Множество $\delta, \delta \subseteq B^q$, называется m-**регулярным** множеством наборов куба B^q, если $m < q, |\delta| = 2^m$ и все префиксы длины m наборов из δ различны. m-регулярному множеству $\delta, \delta \subseteq B^q$, можно взаимнооднозначно сопоставить систему ФАЛ $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_{q-m})$ из $P_2^{q-m}(m)$ так, что набор $\alpha = (\beta, \gamma)$, где $\beta \in B^m$ и $\gamma \in B^{q-m}$, принадлежит δ тогда и только тогда, когда $\psi(\beta) = \gamma$. Любая ФАЛ $g, g \in P_2(q)$, совпадает на m-регулярном множестве наборов $\delta, \delta \subseteq B^q$, с некоторой ФАЛ из $P_2(m)$, если рассматривать $P_2(m)$, как множество всех ФАЛ из $P_2(q)$ с несущественными БП $x_{m+1}, \dots, x_q$. При этом любая ФАЛ из связанной с δ системы функций совпадает на δ с соответствующей БП куба B^q.

Лемма. Для любых натуральных m, λ и $q = m + \lambda$ и для любой системы ФАЛ $g = (g_1, \dots, g_\lambda)$ из $P_2^\lambda(m)$ существует m-регулярное разбиение $\Delta = (\delta_1, \dots, \delta_{2^{q-m}})$ куба B^q такое, что любая ФАЛ g_i на любой компоненте δ_j совпадает либо с одной из БП $x_{m+1}, \dots, x_q$, либо с ее отрицанием.

Этапы доказательства. Поясню, что имеется в виду под "любая ФАЛ g_i на любой компоненте δ_j совпадает либо с одной из БП $x_{m+1}, \dots, x_q$, либо с ее отрицанием". Это значит, что столбец значений любой ФАЛ g_i на первых m переменных наборов из δ_j совпадает со столбцом значений одной из БП $x_{m+1}, \dots, x_q$, либо с его отрицанием.

В качестве δ_1 мы берем m-регулярное множество, отвечающее системе ФАЛ $g = (g_1, \dots, g_\lambda)$. Чтобы получить $\delta_2, \dots, \delta_{2^{q-m}}$, мы всеми возможными способами накладываем отрицание на $(q-m)$ последних столбцов. Любой набор из B^q есть в δ с точностью до $(q-m)$ последних столбцов. Поскольку мы перебирали все возможные отрицания $(q-m)$ последних столбцов, в одном из δ_i найдется искомый набор. Из этого и из того, что $|\Delta| = 2^q$ получаем, что Δ – разбиение B^q. □

Теорема. Для любой ФАЛ $f, f \in P_2(n)$, в $\mathcal{U}^\Phi$ существует реализующая ее формула $\mathcal{F}_f$, для которой $L(\mathcal{F}_f) \leq \frac{2^n}{\log n}(1 + \frac{2\log\log n + O(1)}{\log n})$.

Этапы доказательства. Построим стандартное ДУМ G порядка m и высоты $s \leq 2^m$, $|G| = \lambda$, $q = m + \lambda$, $\Delta = (\delta_1, \ldots, \delta_{2^\lambda})$ – разбиение B^q, полученное для $\vec{G}$ по предыдущей лемме. Построим для f формулу, имеющую вид $\widetilde{\mathcal{F}}_f = \bigvee_{i=1}^{2^\lambda} \mathcal{U}_i(x')\widehat{\mathcal{F}}_{n-q}(x'', J_{\widetilde{0},i}, \ldots, J_{\widetilde{1},i})$. $\widehat{\mathcal{F}}_{n-q}(x'', y_0, \ldots, y_{2^{n-q}-1})$ – мультиплексор порядка $(n-q)$, $\mathcal{U}_i, i \in [1, 2^\lambda]$ – совершенная ДНФ характеристической ФАЛ δ_i, $J_{\sigma'',i}$ моделирует ФАЛ f на компоненте δ_i. После оптимизации $\widetilde{\mathcal{F}}_f$ по числу отрицаний, получим $L_{\&,\vee}(\mathcal{F}_f) \leq 2^{q-m}(q \cdot 2^m + (p-1)2^{n-q} + 3 \cdot 2^{n-q})$, $L_{\neg}(\mathcal{F}_f) \leq q \cdot 2^q + 2 \cdot 2^{n-m}$. Взяв m и s правильным образом, получим необходимую оценку. $\square$

Замечание. Установленная оценка справедлива и для сложности π-схемы $\widetilde{\Sigma}_f$, которая моделирует построенную в ходе получения формулы $\mathcal{F}_f$ формулу $\widetilde{\mathcal{F}}_f$ с поднятыми отрицаниями и реализует ФАЛ f.

Замечание. $Alt(\widetilde{\mathcal{F}}_f) \leq Alt(\widehat{\mathcal{F}}_{n-q}) + 3$.

Следствие. $L^\Phi(n) \sim \frac{2^n}{\log n}$, $L^\pi(n) \sim \frac{2^n}{\log n}$.

Теорема. Для $n = 1, 2, \ldots$ выполняется неравенство $D(n) \leq n - \log\log n + O(1)$.

Этапы доказательства. Вместо мультиплексора из предыдущего доказательства следует взять КД порядка $(n-q)$. Откуда и получим требуемую оценку.

Следствие. $D(n) = n - \log\log n \pm O(1)$.

§6

Теорема. Асимптотически наилучший метод. Для любой ФАЛ $f, f \in P_2(n)$, существует реализующая ее КС Σ_f такая, что $L(\Sigma_f) \leq \frac{2^n}{n}(1 + O(\frac{1}{\sqrt{n}}))$.

Этапы доказательства. Построим стандартное ДУМ G порядка m и высоты $s \leq 2^m$, $|G| = p$, $q = m + p$. $\psi_1, \ldots, \psi_p$ – характеристические функции G. $\Delta = (\delta_1, \ldots, \delta_{2^p})$ – разбиение B^q, полученное для $\vec{G}$. По свойствам данного разбиения, любая ФАЛ $g, g \in P_2(q)$ на любой компоненте разбиения вида $\delta_1 \oplus \alpha$, где $\alpha = (0, \ldots, 0, \alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_{m+p})$ совпадает с ФАЛ $\breve{g} = x_{m+1}^{\bar{\alpha}_{m+1}} \cdot g_1 \vee \ldots \vee x_q^{\bar{\alpha}_q} \cdot g_p$, где $g_i = g\psi_i$.

Пусть $q = m + p$, Σ_G – $(1, \lambda)$-КС, реализующая систему ФАЛ $\vec{G}$ на основе КД. Построим 2^p $(1, 2^{n-q})$-КС, которые содержат КС Σ_G в качестве подсхемы и реализуют каждую ФАЛ $\breve{g}_{\sigma''}$. Σ' получается в результате отождествления входов всех построенных КС.

Σ'' строим, как КС, реализующую столбец из всех ФАЛ вида $\chi_i(x') \cdot x_{q+1}^{\sigma_{q+1}} \ldots x_n^{\sigma_n}$. Строим объединением 2^p КД порядка $(2^{n-q}, 1)$ и $(2^p, 1)$ КД, реализующим χ_i отождествлением выходов. $\Sigma_f = \Sigma''(\Sigma')$. $L(\Sigma_f) \leq (p+2)2^{n-m} + (\lambda+1)2^{q+1}$. Взяв параметры m и s нужным образом, получим необходимую оценку. $\square$

Следствие. $L^K(n) \sim \frac{2^n}{n}$.

Замечание. Построенную КС Σ_f можно разбить на не более, чем $\lambda p \cdot 2^p + 2^{n-m+1} + (\lambda + 1)2^{q+1} = O(\frac{2^n}{n\sqrt{n}})$ "звезд", каждая из которых состоит из контактов одного и того же типа.

§7

$\mathcal{Q}, \mathcal{Q} = \mathcal{Q}(1), \mathcal{Q}(2), \ldots, \mathcal{Q}(n), \ldots$, где $\mathcal{Q} \subseteq P_2$ и $\mathcal{Q}(n) = \mathcal{Q} \cap P_2(n), n = 1, 2, \ldots$.

$\Psi(\mathcal{Q}(n)) = \max\limits_{f \in \mathcal{Q}(n)} \Psi(f)$.

$||\mathcal{U}(\Psi(\mathcal{Q}(n)), n)|| \geq |\mathcal{Q}(n)|$.

Лемма. Для класса Фал $\mathcal{Q}$ такого, что $n = o(\frac{\log|\mathcal{Q}(n)|}{\log\log|\mathcal{Q}(n)|})(\log n = o(\log\log|\mathcal{Q}(n)|))$, выполняются следующие асимптотические неравенства $L^C(\mathcal{Q}(n)) \gtrsim \frac{\log|\mathcal{Q}(n)|}{\log\log|\mathcal{Q}(n)|}$, (соответственно $L^K(\mathcal{Q}(n)) \gtrsim \frac{\log|\mathcal{Q}(n)|}{\log\log|\mathcal{Q}(n)|}$).

Этапы доказательства. Доказывается аналогично последней теореме второго параграфа.

Лемма. Если разделительная по выходам $(1, m)$-КС Σ реализует m различных ФАЛ, отличных от 0, то $L(\Sigma) \geq 2m - 2$.

Этапы доказательства. Σ – связная КС. Из ее разделительности следует, что $\forall\alpha, \alpha \in B^n$ сеть $\Sigma|\alpha$ состоит не менее чем из m компонент связности. Значит, было удалено не менее, чем

$m-1$ контактов. Таким образом получим, что $|E(\Sigma|\bar{\alpha})| \geq m-1$. Суммируя это неравенство по всем наборам куба B^n и учитывая, что каждый контакт КС Σ не проводит ровно на половине всех наборов (каждый контакт был посчитан столько раз, сколько наборов он проводит, то есть 2^{n-1} раз) получим $2^{n-1}L(\Sigma) \geq 2^n(m-1)$. Откуда и следует доказываемое неравенство. $\square$

Следствие. Контактное дерево порядка n является минимальной разделительной $(1, 2^n)$-КС, реализующей систему ФАЛ Q_n.

Лемма. Если система ФАЛ $F = (f_1, \ldots, f_m)$ состоит из попарно различных ФАЛ от БП $X(n)$, отличных от 0 и 1, то $L^K(F) \geq 2^{1-n} \sum\limits_{j=1}^{m} |N_{f_j}|$.

Этапы доказательства. $\forall \alpha, \alpha \in B^n$ в сети $\Sigma|\alpha$ имеется компонента связности, включающая вход и столько выходов, сколько функций обращаются в единицу на α. Отсюда получим $|E(\Sigma|\alpha)| \geq f_1(\alpha) + \cdots + f_m(\alpha)$. Суммируя неравенство во всем наборам получим $2^{n-1}L(\Sigma) \geq \sum\limits_{j=1}^{m} |N_{f_j}|$.

Следствие. $L^K(J_n) \geq 2^{n+1} - 2$.

Лемма. Для $n = 1, 2, \ldots$ выполняются неравенства $L^K(\vec{Q_n}) \leq 2^n + O(\frac{2^n}{n})$, $L^K(\vec{J_n}) \leq 2^{n+1} + O(\frac{2^n}{n})$.

Этапы доказательства. Выберем параметры: $\lambda = 2^m$, $q = m + \lambda$, $q \leq n$. $\Delta = (\delta_1, \ldots, \delta_{2^\lambda})$ – m-регулярное разбиение куба B^q, отвечающее системе $\vec{Q}_m$ – системе ФАЛ из ЭК ранга m. Любая ЭК ранга q – $K(x') = x_1^{\sigma_1} \ldots x_q^{\sigma_q}$, $\sigma' = (\sigma_1, \ldots, \sigma_q) \in \delta_i$ совпадает на множестве δ_i с одной из ЭК системы $\vec{Q}_m$. Иначе говоря, совпадает с БП $x_{j_{\sigma'}}^{\alpha_{\sigma'}}$, $m+1 \leq j_{\sigma'} \leq q$, $\alpha_{\sigma'} \in B$. Любая ЭК $K = x_1^{\sigma_1} \ldots x_n^{\sigma_n}$ может быть представлена в виде $K = \chi_i(x') \cdot x_{j_{\sigma'}}^{\alpha_{\sigma'}} \cdot K_{\sigma''}(x'')$.

$(1, 2^\lambda)$-КС Σ' реализует систему ФАЛ $\vec{\chi}$ объединением КС для χ_i, построенных на основе их совершенных ДНФ. $K_{\sigma''}(x'')$ реализуются КД. Получается схема $\Sigma_n^{(\&)}$.

В схеме $\Sigma_n^{(\&)}$ 2^λ подсхем сложностью $q2^m$ (сложность Σ_i') + $2^{n-q+1} - 2$ (сложность КД порядка $n - q$) + $2^{n-q} \cdot \lambda$ (к каждому из выходов КД присоединено λ контактов). Получаем $L(\Sigma_n^{(\&)}) = 2^\lambda(q2^m + 2^{n-q+1} - 2 + \lambda 2^{n-q})$. Вспомним, что $\lambda = q - m$, раскроем скобки и получим: $L(\Sigma_n^{(\&)}) = \lambda 2^{n-m} + 2^{n-m+1} + q2^q$. Откуда и получим требуемую оценку. $\square$

Следствие. $L^K(\vec{Q_n}) \sim 2^n$, $L^K(\vec{J_n}) \sim 2^{n+1}$.

Лемма. Для $n = 1, 2, \ldots$ выполняются неравенства $L^\pi(\mu_n) \leq 2 \cdot 2^n + O(\frac{2^n}{n})$, $L^C(\mu_n) \leq 2 \cdot 2^n + O(\frac{2^n}{n})$, $D(\mu_n) \leq n + 6$, причем существует такая реализация ФАЛ μ_n и бесповторная по информационным БП формула $\mathcal{F}_n$ с поднятыми отрицаниями, глубина которой удовлетворяет последнему из них, альтернирование не больше 3, а сложность не превосходит $7 \cdot 2^n$.

Этапы доказательства. Искомая π-схема Σ_n получается в результате присоединения к каждому из выходов $\Sigma_n^{(\&)}$ соответствующей ему информационной БП и отождествления концевых вершин всех таких контактов в выходную вершину Σ_n. СФЭ S_n получается из формулы, моделирующей Σ_n в результате приведения вершин, соответствующих ФЭ $\neg$.

Формулу $\tilde{\mathcal{F}}_n$ построим моделированием КС Σ_n. Формулу $\mathcal{F}_n$ получим из нее оптимизацией по глубине. Получим формулу, обладающую всеми необходимыми свойствами. $\square$

Лемма. Если для ФАЛ $f, f \in P_2(n)$, и для любого $\sigma, \sigma \in B$, ФАЛ $f_\sigma(x_1, \ldots, x_{n-1}, \sigma) \not\equiv 0, 1$, то $L^C_{\&,\vee} \geq \min\{L^C_{\&,\vee}(f_0), L^C_{\&,\vee}(f_1)\} + 2$.

Этапы доказательства. Пусть Σ – минимальная по числу ФЭ $\&$ и $\vee$ СФЭ из класса $\mathcal{U}^C$, которая реализует ФАЛ f и которая не содержит цепочек из двух последовательно соединенных ФЭ $\neg$. Пусть константа $\sigma, \sigma \in B$ равна 0 тогда и только тогда, когда БП x_n подается в Σ либо на вход ФЭ $\&$, либо на вход ФЭ $\neg$, выход которого поступает на вход ФЭ $\vee$. Тогда при подстановке σ вместо x_n и ЭП на основе тождеств подстановки констант будут удалены по крайней мере два ФЭ типа $\&$ или $\vee$. $\square$

Следствие. $L^C(\mu_n) \geq 2^{n+1} + n - 2$.

Следствие. $L^C(\mu_n) \sim 2^{n+1}$.

Следствие. $n + 1 \leq D(\mu_n) \leq n + 6$.

4

§1

Пусть $(\Sigma, \text{И})$ – модель ненадежной схемы Σ с возможными состояниями $\Sigma = \Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_s$, в которых реализуются ФАЛ $f = f_1, f_2, \ldots, f_s$ соответственно от БП $X(n)$, определенные на множестве наборов $A = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\} \subseteq B^n$. Рассмотрим матрицу M, $M \in B^{p,s}$, где $M\langle i,j\rangle = f_j(\alpha_i)$, считая, что i-й строке (j-му столбцу) этой таблицы соответствует набор α_i (соответственно функция f_j и состояние Σ_j). Матрица, состоящая из различных столбцов (строк) называется **отделимой по столбцам** (соответственно **строкам**) матрицей.

Каждому классу неотличимых состояний модели $(\Sigma, \text{И})$ соответствует группа одинаковых столбцов матрицы M и рассмотрим отделимую по столбцам $\hat{M}$ матрицу, состоящую из всех различных столбцов матрицы M. При этом будем считать, что каждый столбец матрицы $\hat{M}$ связан с соответствующим классом неотличимости состояний модели $(\Sigma, \text{И})$, и будем называть $\hat{M}$ **таблицей контроля** данной модели.

Множество $\mathcal{N}$, состоящее из тех неупорядоченных пар различных чисел отрезка $[1, s]$, для которых пары состояний (столбцов матрицы M) с соответствующими номерами необходимо отличать друг от друга, сравнивая значения, расположенные в тех или иных строках данной пары столбцов. В частности, если $\mathcal{N}$ состоит из всех пар указанного вида, то целью контроля является **диагностика схемы**, а если $\mathcal{N} = \{(1,2), \ldots, (1,t)\}$, то – **проверка исправности схемы**.

Множество строк матрицы M с номерами из T, $T \subseteq [1,p]$, называется **тестом для матрицы** M **относительно множества** $\mathcal{N}$, или, иначе, **тестом для** $(M,\mathcal{N})$, если для любой пары (i,j) из $\mathcal{N}$ существует t, $t \in T$, такое, что $M\langle t,i\rangle \neq M\langle t,j\rangle$. Мощность теста называется также его **длиной**.

Тест, который перестает быть тестом при удалении любой своей строки, называется **тупиковым**, а тест, который имеет минимальную мощность, – **минимальным**. В том случае, когда целью контроля является диагностика схемы (проверка исправности схемы), тест называется **диагностическим** (соответственно **проверяющим**).

Множество наборов $\tau, \tau \subseteq A$, образует **тест для модели** $(\Sigma$, **И**$)$ **относительно цели контроля** $\mathcal{N}$, или, иначе, **тест для** $(\Sigma$, **И**, $\mathcal{N})$, если соответствующие наборам из τ строки матрицы M образуют тест для $(M, \mathcal{N})$.

Сопоставим i-й строке, $i \in [1,p]$, матрицы M БП y_i, а каждому набору $\beta, \beta \in B^p$, значений этих переменных $y = (y_1, \ldots, y_p)$ – множество строк матрицы M с номерами из множества $I = I(\beta) \subseteq [1,p]$, где $i \in I(\beta)$ тогда и только тогда, когда $\beta\langle i\rangle = 1$. Рассмотрим ФАЛ $F(y)$, для которой $F(\beta) = 1$ тогда и только тогда, когда система строк матрицы M с номерами из $I(\beta)$ образует тест для $(M, \mathcal{N})$, и будем называть эту ФАЛ **функцией теста для** $(M, \mathcal{N})$.

Лемма. Функция теста $f(y_1, \ldots, y_p)$ для отделимой по столбцам матрицы M, $M \in B^{p,s}$, и цели контроля $\mathcal{N}$ может быть задана с помощью КНФ $f(y_1, \ldots, y_p) = \bigwedge\limits_{(i,j)\in\mathcal{N}} \left(\bigvee\limits_{\substack{1\le t\le p \\ M\langle t,i\rangle \neq M\langle t,j\rangle}} y_t \right)$

Этапы доказательства. ФАЛ теста F для пары $(M,\mathcal{N})$ является одновременно ФАЛ покрытия для матрицы M и обратно. Так что лемма верна согласно первой лемме шестого параграфа первой главы. □

Следствие. Каждая элементарная конъюнкция вида $y_{t_1} \cdots y_{t_r}$ сокращенной ДНФ функции $f(y_1, \ldots, y_p)$, получающаяся из КНФ леммы в результате раскрытия скобок и приведения подобных, соответствует тупиковому тесту, связанному с множеством $T = \{t_1, \ldots, t_r\}$ и обратно.

Лемма. Длина любого тупикового диагностического теста для отделимой по столбцам матрицы из множества $B^{p,s}$ заключена в пределах от $\lceil \log s \rceil$ до $(s-1)$.

Этапы доказательства. Пусть $M \in B^{p,s}$ и первые t строк матрицы M образуют ее тупиковый диагностический тест. $\widehat{M}$ - матрица, состоящая из первых t строк матрицы M. Число различных булевых столбцов высоты t равно 2^t. Поскольку все s столбцов различны, $s \le 2^t$, то есть $t \ge \lceil \log s \rceil$.

$\forall q, q \in [1,t]$ определим отношение эквивалентности: $m' \underset{q}{\sim} m''$ тогда и только тогда, когда столбцы m', m'' матрицы $\widehat{M}$ совпадают в строках с номерами из $[1,q]$. Число классов эквивалентности – $\theta(q)$. Поскольку тест тупиковый, $\theta(q) < \theta(q+1)$. Поскольку тест диагностический, $\theta(t) = s$. Получаем $1 = \theta(0) < \theta(1) < \dots < \theta(t) = s$, то есть $t \leq (s-1)$. $\Box$

Лемма. Пусть $\varphi(s)$, $t(s)$ и $p(s)$ – целочисленные неотрицательные функции натурального аргумента s, для которых $t(s) = \lceil 2\log s \rceil + \varphi(s), p(s) \geq t(s), \varphi(s) \underset{s\to\infty}{\longrightarrow} \infty$. Тогда у почти всех отделимых по столбцам матриц из $B^{p(s),s}$ первые $t(s)$ строк образуют диагностический тест.

Этапы доказательства. Оценим количество заданных матриц $B^{p(s),s}$: $2^t(2^t-1)\dots(2^t-s+1)\cdot 2^{(p-t)s} = 2^{ps}(1-\frac{1}{2^t})\dots(1-\frac{(s-1)}{2^t})$. Их доля среди всех отделимых по столбцам матриц из $B^{p,s}$ (2^{ps}) не меньше, чем $(1-\frac{1}{2^t})\dots(1-\frac{(s-1)}{2^t}) \geq 1 - \frac{s^2}{2^t} \geq 1 - 2^{-2\varphi(s)}$, что стремится к 1 при s стремящемся к бесконечности. $\Box$

Следствие. Для любой неотрицательной и неограниченно возрастающей функции $\varphi(s)$ у почти всех отделимых по столбцам матриц из $B^{p,s}$ длина минимального диагностического теста не больше, чем $2\log s + \varphi(s)$.

§2

Контакты рассматриваемых КС могут выходить из строя, переходя в одно из двух возможных неисправных состояний: **состояние обрыва**, когда контакт не проводит, и **состояние замыкания**, когда контакт проводит при любых значениях управляющей им БП.

Будем говорить, что КС Σ является (p,q) **- самокорректирующейся КС** или, иначе, корректирует p обрывов и q замыканий, где $p \geq 0$ и $q \geq 0$, если любая КС Σ', которая может быть получена из КС Σ в результате обрыва не более чем p, и замыкания не более, чем q, контактов, эквивалентна Σ.

Лемма. Для любых $p \geq 0$, $q \geq 0$ и любой КС Σ существует эквивалентная ей КС $\Sigma', \Sigma' \in \mathcal{U}^K_{(p,q)}$, для которой $L(\Sigma') \leq (p+1)(q+1)L(\Sigma)$.

Этапы доказательства. Схема строится путем параллельного и (или) последовательного дублирования контактов. $\Box$

Будем называть **однородной** любую связную КС с неразделенными полюсами, состоящую из контактов одного и того же типа. Представление КС Σ в виде объединения ее однородных подсхем без общих контактов будем называть **однородным разбиением** КС Σ, а минимальное число подсхем в таких разбиениях будем обозначать через $\zeta(\Sigma)$.

Лемма. Для любой КС Σ существуют эквивалентные ей (1, 0)- и (0, 1)-самокорректирующиеся КС Σ' и Σ'' соответственно такие, что $L(\Sigma') \leq L(\Sigma) + \zeta(\Sigma), L(\Sigma'') \leq L(\Sigma) + \zeta(\Sigma)$.

Этапы доказательства. Строится заменой однородных метелок на циклы (звезды). $\Box$

Введем соответствующую функцию Шеннона $L^K_{(p,q)}(n) = \max\limits_{f\in P_2(n)} L^K_{(p,q)}(f)$. Очевидно, что $L^K(f) \leq L^K_{(p,q)}(f); L^K(n) \leq L^K_{(p,q)}(n)$

Теорема Для $n = 1, 2, \dots$ имеют место следующие асимптотические равенства: $L^K_{(1,0)}(n) \sim L^K_{(0,1)}(n) \sim \frac{2^n}{n}$

Этапы доказательства. Нижние оценки следуют из первой теоремы второго параграфа третьей главы. Верхние оценки следуют из первой теоремы шестого параграфа третьей главы и замечания к ней. $\zeta(\Sigma_f) = o(\frac{2^n}{n\sqrt{n}})$. Так что существуют КС, которые реализуют ФАЛ f со сложностью, асимптотически не превосходящей $\frac{2^n}{n}$. $\Box$

Лемма. Для $n = 1, 2, \dots$ имеют место равенства $L^K_{(0,1)}(l_n) = L^K_{(0,1)}(\bar{l}_n) = 4n$.

Этапы доказательства. Для каждого $\sigma, \sigma \in B$, из входа (выхода) этой схемы, проведем контакт вида x_n^σ (x_1^σ) в вершину, соединенную контактом вида $x_n^{\bar\sigma}$ $(x_q^{\bar\sigma})$ с ее выходом (входом).